TD 8 correction
Applications

Exercice 1. 10. Pour l'injectivité la question est précisément : soient deux suites arithmétiques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. A-t-on $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$? Si on note r la raison de u et r' la raison de v (on ne sait pas encore si ce sont les mêmes) on sait qu'on aura $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ et $v_n = v_0 + nr'$. En particulier $u_1 = u_0 + r$ et $v_1 = v_0 + r'$. D'où on déduit en fait $r = u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = r'$, puis donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$. L'application est injective.

Cela donne en même temps les idées pour la surjectivité : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, existe-t-il une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$? Analyse : la raison d'une telle suite est alors nécessairement $b - a$, et donc on pose $r = b - a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$. Synthèse : ceci est bien une suite arithmétique qui vérifie $u_0 = a$ et $u_1 = a + (b - a) = b$. Ceci démontre que l'application est surjective.

11. Pour les suites géométriques, le phénomène est-il le même ? Presque…

Injectivité : soient deux suites géométriques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. A-t-on $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$? Notons q la raison de u et q' la raison de v, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$ et $v_n = v_0 (q')^n$. En particulier on obtient $u_1 = u_0 q$ et $v_1 = v_0 q'$. **Si** on peut diviser par u_0 et par v_0 alors comme précédemment on en déduit facilement que $q = q'$ puis que les suites u et v sont égales. Sinon, c'est que $u_0 = v_0 = 0$. Mais alors les suites u et v sont toutes les deux des suites nulles, et sont donc égales. Donc l'application est injective.

Encore une fois cela donne les idées et explique le problème pour la surjectivité : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, existe-t-il une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$? Notant q la raison de u, alors si $a \neq 0$ on a $q = \frac{b}{a}$ puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$. Mais si $a = 0$ on ne peut pas. Éventuellement si $b = 0$ aussi et alors u est la suite nulle, mais sinon non : il n'existe par exemple pas de suite géométrique dont les termes sont $0, 1, 2, 4, \ldots$ En résumé l'application n'est pas surjective ; l'image est constituée des suites géométriques avec $u_0 \neq 0$ et (union avec) de la suite nulle.

Exercice 7. Il est utile de faire des dessins pour comprendre.

1. Inclusion $\subset$: si $x \in f^{-1}(X \cup Y)$. Alors $f(x) \in X \cup Y$. Donc $f(x) \in X$ ou $f(x) \in Y$. Dans le premier cas $x \in f^{-1}(X)$, dans le deuxième cas $x \in f^{-1}(Y)$. Donc dans tous les cas $x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

   Inclusion $\supset$: si $x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Alors $x \in f^{-1}(X)$ ou $x \in f^{-1}(Y)$. Dans le premier cas $f(x) \in X$. Dans le deuxième cas $f(x) \in Y$. Donc dans tous les cas $f(x) \in X \cup Y$. Donc $x \in f^{-1}(X \cup Y)$.

2. Par équivalence $x \in f^{-1}(X \cap Y)$ ssi $f(x) \in X \cap Y$ ssi $f(x) \in X$ et $f(x) \in Y$ ssi $x \in f^{-1}(X)$ et $x \in f^{-1}(Y)$ ssi $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

3. Inclusion $\subset$: soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Soit $x \in A$, alors $y \in f(A)$. Soit $x \in B$. alors $y \in f(B)$. Donc dans tous les cas $y \in f(A) \cup f(B)$.

   Inclusion $\supset$: soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors soit $y \in f(A)$, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$. Et alors $x_1 \in A \cup B$, et donc $y \in f(A \cup B)$. Soit $y \in f(B)$, donc il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$, et donc $x_2 \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$ aussi.

4. Inclusion $\subset$: soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. D'une part $x \in A$, donc $y \in f(A)$. Et $x \in B$, donc $y \in f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$.

   Dans l'autre sens, on n'y arrive pas… Soit $y \in f(A) \cap f(A)$. Alors $y \in f(A)$, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$. Et $y \in f(B)$, donc il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$. Sans hypothèse supplémentaire on ne peut pas montrer que $x_1 = x_2 \in A \cap B$. D'ailleurs on peut très bien avoir $A \cap B = \emptyset$ mais avec A, B ayant même image par f (cas d'une application constante) auquel cas $f(A \cap B) = \emptyset$ mais $f(A) = f(B)$ est non vide.

   Mais c'est le cas si f est injective : alors de $y = f(x_1) = f(x_2)$ on déduit $x_1 = x_2$ et donc ceci est à la fois dans A et dans B et donc $y \in f(A \cap B)$.

   Réciproquement on peut montrer très facilement que si on a l'inclusion $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ vraie pour toutes parties A, B de E alors f est injective : soient $x_1, x_2 \in E$, supposons $f(x_1) = f(x_2)$. Alors appliquons cette propriété à $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$, qui nous donne que $f(A) \cap f(B)$ est un ensemble à un seul élément inclus dans $f(A \cap B)$, et donc $f(A \cap B)$ ne peut pas être vide et donc $A \cap B$ non plus et donc $x_1 = x_2$.

5. Inclusion $\supset$: $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

   L'autre inclusion est fausse en général (faire un dessin) : il se pourrait qu'on ait $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ alors x_1, x_2 sont tous les deux dans $f^{-1}(f(A))$ mais seulement x_1 est dans A. Le problème vient de l'injectivité : $f^{-1}(f(A))$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est aussi l'image d'un élément de A, mais pas forcément le même élément…

   $\Longleftarrow$: supposons f injective, montrons que pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $u \in A$ (a priori ce n'est pas le même que x, qui lui n'est pas forcément dans A) tel que $f(x) = f(u)$. Mais par injectivité on déduit alors $x = u$ donc $x \in A$.

   $\Longrightarrow$: supposons que pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$, et montrons que f est injective. Soient x_1, $x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors avec $A = \{x_1\}$ on a $f^{-1}(f(A)) = A$, et de même avec $B = \{x_2\}$ on a $f^{-1}(f(B)) = B$. Mais ici $f(A) = f(B)$ (c'est l'ensemble à un élément $\{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$ et donc $A = B$ donc $x_1 = x_2$.

6. Inclusion $\subset$: Si $y \in f(f^{-1}(X))$, alors il existe $x \in f^{-1}(X)$ tel que $y = f(x)$, or par définition $f(x) \in X$ donc $y \in X$.

L'autre inclusion est fausse en général, déjà il se pourrait très bien que $f^{-1}(X)$ soit vide (et dans ce cas $f(f^{-1}(X))$ l'est aussi). Le problème vient de la surjectivité : les éléments de $f(f^{-1}(X))$ sont les éléments de F qui sont image par f d'éléments de E qui sont eux-mêmes antécédents d'éléments de X, donc ne contient pas les éléments de X sans antécédent...

$\Longrightarrow$: montrons que si pour toute partie $X \subset F$, $f(f^{-1}(X)) \supset X$ alors f est surjective. Soit $y \in F$. Posons $X = \{y\}$. Alors $f(f^{-1}(X)) \supset X$ nous dit que $y \in f(f^{-1}(X))$ donc il existe $x \in f^{-1}(X))$ (en particulier $x \in E$) tel que $f(x) = y$.

$\Longleftarrow$: montrons que si f est surjective alors pour toute partie $X \subset F$, $f(f^{-1}(X)) \supset X$. Soit $y \in X$. Alors comme f est surjective il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc y est bien l'image par f d'un élément x de $f^{-1}(X)$.