TD 8
Applications

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soient les applications suivantes $\varphi, \psi : E \to E$. Pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi(u)$ est la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$; et $\psi(u)$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_{n-1}$.

1. Que sont $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$?
2. Étudier l'injectivité de φ et de ψ.

Correction.

1. $\psi \circ \varphi$ fait la chose suivante : prendre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, former la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$, puis appliquer ψ à celle-là donc former la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = v_{n-1}$ soit $w_n = u_n$ $(\forall n \geqslant 1)$.

   $\varphi \circ \psi$ fait la chose suivante : prendre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, former la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_{n-1}$ puis appliquer ψ à celle-là donc former $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = w_{n+1}$ soit $v_n = u_n$ $(\forall n \geqslant 0)$.

   La différence entre les deux : $\psi \circ \varphi$ décale à gauche (donc « perd » u_0) puis re-décale à droite en insérant 0 comme premier terme. Alors que $\varphi \circ \psi$ décale à droite en insérant 0, puis re-décale à gauche donc perd... le 0 qu'elle a inséré. En fait $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_E$.

2. ψ est injective : si $\psi(u) = \psi(v)$ alors $\varphi(\psi(u)) = \varphi(\psi(v))$ donc (comme $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$) on déduit $u = v$.

   De même, φ est surjective : pour toute suite v alors on pose $u = \psi(v)$ et alors $\varphi(u) = \varphi(\psi(v)) = v$.

   Par contre, ψ n'est pas surjective : si $v = \psi(u)$ alors $v_0 = 0$, donc une suite v avec $v_0 \neq 0$ n'est pas dans l'image de ψ.

   Et φ n'est pas injective : deux suites u, v telles que $\forall n \geqslant 1$, $u_n = v_n$ mais $u_0 \neq v_0$ sont bien des suites différentes, mais ont la même image par φ.

□

Exercice 7. *Festival de quantificateurs*

Soit une application quelconque entre ensembles quelconques $f : E \to F$. Démontrer les propriétés suivantes.

1. Pour toutes parties X, Y de F : $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
2. Pour toutes parties X, Y de F : $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
3. Pour toutes parties A, B de E : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. Pour toutes parties A, B de E : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A-t-on égalité en général ?
5. Pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$. L'égalité est vraie (pour tout A) si et seulement si f est injective.
6. Pour toute partie $X \subset F$, $f(f^{-1}(X)) \subset X$. L'égalité est vraie (pour tout X) si et seulement si f est surjective.

Correction. Il est utile de faire des dessins pour comprendre.

1. Inclusion $\subset$: si $x \in f^{-1}(X \cup Y)$. Alors $f(x) \in X \cup Y$. Donc $f(x) \in X$ ou $f(x) \in Y$. Dans le premier cas $x \in f^{-1}(X)$, dans le deuxième cas $x \in f^{-1}(Y)$. Donc dans tous les cas $x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

   Inclusion $\supset$: si $x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Alors $x \in f^{-1}(X)$ ou $x \in f^{-1}(Y)$. Dans le premier cas $f(x) \in X$. Dans le deuxième cas $f(x) \in Y$. Donc dans tous les cas $f(x) \in X \cup Y$. Donc $x \in f^{-1}(X \cup Y)$.

2. Par équivalence $x \in f^{-1}(X \cap Y)$ ssi $f(x) \in X \cap Y$ ssi $f(x) \in X$ et $f(x) \in Y$ ssi $x \in f^{-1}(X)$ et $x \in f^{-1}(Y)$ ssi $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

3. Inclusion $\subset$: soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Soit $x \in A$, alors $y \in f(A)$. Soit $x \in B$. alors $y \in f(B)$. Donc dans tous les cas $y \in f(A) \cup f(B)$.

   Inclusion $\supset$: soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors soit $y \in f(A)$, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$. Et alors $x_1 \in A \cup B$, et donc $y \in f(A \cup B)$. Soit $y \in f(B)$, donc il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$, et donc $x_2 \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$ aussi.

4. Inclusion $\subset$: soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$. D'une part $x \in A$, donc $y \in f(A)$. Et $x \in B$, donc $y \in f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$.

   Dans l'autre sens, on n'y arrive pas... soit $y \in f(A) \cap f(A)$. Alors $y \in f(A)$, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$. Et $y \in f(B)$, donc il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$. Sans hypothèse supplémentaire on ne peut pas montrer que $x_1 = x_2 \in A \cap B$. D'ailleurs on peut très bien avoir $A \cap B = \emptyset$ mais avec A, B ayant même image par f (cas d'une application constante) auquel cas $f(A \cap B) = \emptyset$ mais $f(A) = f(B)$ est non vide.

   Mais c'est le cas si f est injective : alors de $y = f(x_1) = f(x_2)$ on déduit $x_1 = x_2$ et donc ceci est à la fois dans A et dans B et donc $y \in f(A \cap B)$.

   Réciproquement on peut montrer très facilement que si on a l'inclusion $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ vraie pour toutes parties A, B de E alors f est injective : soient $x_1, x_2 \in E$, supposons $f(x_1) = f(x_2)$. Alors appliquons cette propriété à $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$, qui nous donne que $f(A) \cap f(B)$ est un ensemble à un seul élément inclus dans $f(A \cap B)$, et donc $f(A \cap B)$ ne peut pas être vide et donc $A \cap B$ non plus et donc $x_1 = x_2$.

5. Inclusion $\supset$: $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

   L'autre inclusion est fausse en général (faire un dessin) : il se pourrait qu'on ait $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ alors x_1, x_2 sont tous les deux dans $f^{-1}(f(A))$ mais seulement x_1 est dans A. Le problème vient de l'injectivité : $f^{-1}(f(A))$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est aussi l'image d'un élément de A, mais pas forcément le même élément…

   $\Longleftarrow$: supposons f injective, montrons que pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Donc $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $u \in A$ (a priori ce n'est pas le même que x, qui lui n'est pas forcément dans A) tel que $f(x) = f(u)$. Mais par injectivité on déduit alors $x = u$ donc $x \in A$.

   $\Longrightarrow$: supposons que pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$, et montrons que f est injective. Soient x_1,$x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors avec $A = \{x_1\}$ on a $f^{-1}(f(A)) = A$, et de même avec $B = \{x_2\}$ on a $f^{-1}(f(B)) = B$. Mais ici $f(A) = f(B)$ (c'est l'ensemble à un élément $\{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$ et donc $A = B$ donc $x_1 = x_2$.

6. Inclusion $\subset$: Si $y \in f(f^{-1}(X))$, alors il existe $x \in f^{-1}(X)$ tel que $y = f(x)$, or par définition $f(x) \in X$ donc $y \in X$.

   L'autre inclusion est fausse en général, déjà il se pourrait très bien que $f^{-1}(X)$ soit vide (et dans ce cas $f(f^1(X))$ l'est aussi). Le problème vient de la surjectivité : les éléments de $f(f^{-1}(X))$ sont les éléments de F qui sont image par f d'élements de E qui sont eux-mêmes antécédents d'élements de X, donc ne contient pas les éléments de X sans antécédent…

   $\Longrightarrow$: montrons que si pour toute partie $X \subset F$, $f(f^{-1}(X)) \supset X$ alors f est surjective. Soit $y \in F$. Posons $X = \{y\}$. Alors $f(f^{-1}(X)) \supset X$ nous dit que $y \in f(f^{-1}(X))$ donc il existe $x \in f^{-1}(X))$ (en particulier $x \in E$) tel que $f(x) = y$.

   $\Longleftarrow$: montrons que si f est surjective alors pour toute partie $X \subset F$, $f(f^{-1}(X)) \supset X$. Soit $y \in X$. Alors comme f est surjective il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc y est bien l'image par f d'un élément x de $f^{-1}(X)$.

$\square$