TD 8
Applications

Exercice 1. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, -t)$
2. $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x + 3y)$
4. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x + y, x + 3y, x - 2y)$
5. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
6. $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(p, q) \mapsto 2^p 3^q$
7. $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$
8. Soit E un ensemble quelconque, $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq E$
   $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $X \mapsto X \cap A$
9. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$
10. {suites arithmétiques} $\to \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$
11. {suites géométriques} $\to \mathbb{R}^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$
12. (pour $n \in \mathbb{N}^*$) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \mapsto \sum_{i=1}^n a_i$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soient les applications suivantes $\varphi, \psi : E \to E$. Pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi(u)$ est la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$; et $\psi(u)$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_{n-1}$.

1. Que sont $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$?
2. Étudier l'injectivité de φ et de ψ.

Exercice 3. Soient les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{sh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité, et donner des intervalles les plus grands possibles entre lesquels ces fonctions réalisent une bijection.

Exercice 4. Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leur application réciproque.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^3 - 1$
2. $\mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $z \mapsto \frac{1+iz}{z-1}$
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, 4x + 3y)$
4. $]0, \pi[\to]0, +\infty[$, $x \mapsto 3e^{5\tan(x - \frac{\pi}{2})}$

Exercice 5. *Involutions*
Calculer la composition de ces fonctions avec elles-même, puis montrer qu'elles sont bijectives :

1. Soit E un ensemble quelconque, on considère $c : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto \overline{A}$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $\varphi : E \to E$, $f \mapsto (x \mapsto f(-x))$ et $\psi : E \to E$, $f \mapsto (x \mapsto -f(-x))$.
3. Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$, on considère $\mu : E \to E$, $f \mapsto (z \mapsto \overline{f(\overline{z})})$

Exercice 6. Étudier la bijectivité des fonctions réelles suivantes et donner des intervalles (les plus larges possibles) entre lesquels elles réalisent une bijection, et donner la bijection réciproque.

1. $x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$
2. $x \mapsto x^2 - 3x - 4$
3. $x \mapsto \frac{\pi - 2\arctan x}{\pi + 2\arctan x}$
4. $x \mapsto \sqrt{e^x - e^{-x}}$

Exercice 7. *Festival de quantificateurs*
Soit une application quelconque entre ensembles quelconques $f : E \to F$. Démontrer les propriétés suivantes.

1. Pour toutes parties X, Y de F : $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
2. Pour toutes parties X, Y de F : $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
3. Pour toutes parties A, B de E : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. Pour toutes parties A, B de E : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. A-t-on égalité en général ?
5. Pour toute partie $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$. L'égalité est vraie (pour tout A) si et seulement si f est injective.
6. Pour toute partie $X \subset F$, $f(f^{-1}(X)) \subset X$. L'égalité est vraie (pour tout X) si et seulement si f est surjective.