Correction
TD 9
Dénombrement

Exercice 12. *Formule d'inclusion-exclusion*

1. Soient A, B, C trois ensembles. Démontrer que :
$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A\cup B\cup C) &= \operatorname{Card}(A)+\operatorname{Card}(B)+\operatorname{Card}(C)-\operatorname{Card}(A\cap B)\\ &\quad -\operatorname{Card}(A\cap C)-\operatorname{Card}(B\cap C)+\operatorname{Card}(A\cap B\cap C)\end{aligned} \tag{2}$$
2. Application : dénombrer les mots de 10 lettres écrits uniquement avec les lettres « B », « I », « O » et utilisant au moins une fois chaque lettre.
3. Plus généralement, soit une famille d'ensembles $A_1,\dots,A_n$, montrer que :
$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \tag{3}$$

Correction. Il reste à démontrer la formule dans le cas général par récurrence. On note $P(n)$: « pour tous ensembles $A_1,\dots,A_n$ alors la formule (3) est vérifiée ». Pour $n=1$ elle dit seulement $\operatorname{Card}(A_1)=\operatorname{Card}(A_1)$, pour $n=2$ c'est la formule du cours $\operatorname{Card}(A_1\cup A_2)=\operatorname{Card}(A_1)+\operatorname{Card}(A_2)-\operatorname{Card}(A_1\cap A_2)$ et pour $n=3$ c'est la formule(2). Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$. Soient $n+1$ ensembles $A_1,\dots,A_{n+1}$. On applique la formule pour les n ensembles $A_1,\dots,A_{n-1},(A_n\cup A_{n+1})$. Pour cela on pose pour $1\leqslant i\leqslant n-1$, $B_i=A_i$ et $B_n=A_n\cup A_{n+1}$. Alors par l'hypothèse de récurrence :
$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\operatorname{Card}(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cap\cdots\cap B_{i_k}) \tag{4}$$
Du côté gauche, c'est tout simplement
$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) &= \operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\cup B_n\right)\\ &= \operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\cup A_n\cup A_{n+1}\right)=\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)\end{aligned} \tag{5}$$

À droite, il s'agit de séparer le dernier terme. *Sous* la somme on sépare là où on considère B_n et là où on ne le considère pas, ce qui donne le découpage :
$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\operatorname{Card}(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cap\cdots\cap B_{i_k}) &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1}\operatorname{Card}(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cap\cdots\cap B_{i_k})\\ &\quad+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\operatorname{Card}(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cap\cdots\cap B_n)\end{aligned} \tag{6}$$
(soit on prend k des ensembles parmi les $n-1$ premiers, soit on en prend $k-1$ parmi les $n-1$ premiers et le k-ième est B_n du coup). Dans (6) à droite, on a tout simplement
$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1}\operatorname{Card}(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cap\cdots\cap B_{i_k})\\ &\qquad= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1}\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})\end{aligned} \tag{7}$$
car $B_{i_k}=A_{i_k}$ si $i_k\leqslant n-1$. Pour l'autre morceau on remplace le B_n par $A_n\cup A_{n+1}$ et on distribue :
$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cap\cdots\cap B_n) &= \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap(A_n\cup A_{n+1}))\\ &= \operatorname{Card}\Big((A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_n)\cup(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{n+1})\Big)\\ &= \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_n)+\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{n+1})\\ &\quad-\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})\end{aligned} \tag{8}$$
Résumons, on en est à :
$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Bigg(&\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1}\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})\\ &+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_n)\\ &+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{n+1})\\ &-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1}\operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1})\Bigg)\end{aligned} \tag{9}$$

Si on regarde bien calmement, sous la somme avec un signe $+$, nous avons successivement les intersections d'ensembles parmi $A_1 \dots, A_{n+1}$:

— k ensembles parmi les $n-1$ premiers,
— k ensembles dont le dernier est A_n,
— k ensembles dont le dernier est A_{n+1},

et cela forme *presque* toutes les intersections possibles de k ensembles parmi ces $n+1$: il manque l'intersection de $k-2$ ensembles parmi les $n-1$ premiers, avec A_n et A_{n+1}. Mais cela va provenir du dernier morceau avec un signe $-$ qui est une intersection de $k+1$ ensembles dont les deux derniers sont A_n et A_{n+1} : en le sortant et en le décalant de la somme

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} - \left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{k-1}\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_n\cap A_{n+1})\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{k-1}\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_n\cap A_{n+1})\right)$$
$$= \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{k-2}\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_n\cap A_{n+1})\right) \quad (10)$$

(changement d'indice où on remplace k par $k-1$, et d'un coup $(-1)^{k+1}$ est la même chose que $(-1)^{k-1}$) et en recollant tous les morceaux on trouve bien, en séparant à part le terme d'indice $n+1$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Bigg(& \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k}) \\ & + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{k-1}\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_n) \\ & + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{k-1}\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{n+1}) \\ & + \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{k-2}\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_n\cap A_{n+1})\Bigg) \\ & + (-1)^n \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{n-1}\leqslant n-1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_n\cap A_{n+1}) \quad (11)\end{aligned}$$

et donc sous la somme on trouve bien comme annoncé

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n+1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k}) \quad (12)$$

et le dernier morceau hors de la somme n'est rien d'autre que l'intersection de tout

$$\operatorname{Card}(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n\cap A_{n+1}) \quad (13)$$

que l'on peut écrire aussi (il n'y a qu'un seul choix de $n+1$ indices consécutifs entre 1 et $n+1$)

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_{n+1}\leqslant n+1} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_n}\cap A_{i_{n+1}}) \quad (14)$$

et donc tout ceci se recolle pour donner $P(n+1)$. □

Exercice 13. *Il y a des infinis plus grands que d'autres*

1. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
2. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.
3. (argument diagonal de Cantor) Supposons qu'il existe une bijection φ entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Les nombres réels sont donc numérotés $r_0, r_1, \dots$ développons la partie décimale de chaque nombre :
$$\begin{aligned} r_0 &= n_0, d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}\dots \\ r_1 &= n_1, d_{1,0}d_{1,1}d_{1,2}\dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4)$$
où $\forall i\in\mathbb{N}$, $n_i\in\mathbb{Z}$ (partie entière de r_i) et $\forall j\in\mathbb{N}$, $d_{i,j}\in\{0,\dots,9\}$ (chiffres après la virgule de r_i). On forme alors un nombre ainsi : pour $j\in\mathbb{N}$ on choisit pour d_j un chiffre décimal différent de $d_{j,j}$ (par exemple on peut ajouter 1 à $d_{j,j}$, et pour 9 on prend 0). Montrer que le nombre $R = 0, d_0d_1d_2\dots$ n'est pas dans l'image de φ et conclure.
4. Soit E un ensemble quelconque. On souhaite montrer que E n'est **jamais** en bijection avec $\mathcal{P}(E)$. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'appication surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$ en considérant $\{x\in E \mid x\notin f(x)\}$.

Correction. 3. On forme le nombre R selon le procédé décrit. Alors R ne coïncide avec aucun des nombres dans l'image de φ tout simplement car le nombre r_j a sa j-ième décimale $d_{j,j}$ qui est différente de celle de R. On en déduit qu'il n'existe pas de surjection (et donc a fortiori de bijection) de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ et donc que $\mathbb{R}$ est un infini strictement plus grand que $\mathbb{N}$.

4. Supposons qu'il existe une application surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Posons $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, c'est une partie de E donc un élément de $\mathcal{P}(E)$ (il n'y a aucune contradiction ou paradoxe à définir A ainsi : x est un élément de E, $f(x)$ une partie de E, la condition $x \notin f(x)$ n'a donc rien de paradoxal). Si f est surjective alors A est l'image par f d'un élément x_0 de E. A-t-on $x_0 \in A$? Si oui alors $x_0 \notin f(x_0)$ (définition de A) donc $x_0 \notin A$ (car $f(x_0) = A$) ce qui est contradictoire. Mais sinon c'est que $x_0 \notin A$ donc $x_0 \notin f(x_0)$ donc $x_0 \in A$ ce qui est aussi contradictoire. C'est donc l'hypothèse de l'existence de f surjective qui est impossible.

   On en déduit qu'il n'existe jamais de surjection (et a fortiori de bijection) de E vers $\mathcal{P}(E)$. Ainsi si E est infini alors $\mathcal{P}(E)$ est toujours un infini strictement plus grand, et on peut continuer à $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ qui est encore plus grand et ainsi de suite.

   $\square$