TD 9
Dénombrement

Exercice 1. On forme des mots de passe à 8 caractères pris parmi les lettres minuscules a-z et les chiffres 0-9.

1. Combien de mots de passe différents sont possibles ?
2. Combien y a-t-il de mots de passe comportant au moins la lettre « x » ?
3. Combien y a-t-il de mots de passe comportant au moins un chiffre ?
4. Combien y a-t-il de mots de passe ayant au moins deux caractères identiques ?

Exercice 2. Un nombre est appelé un *palindrome* s'il peut se lire aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche (par exemple 121 ou bien 2002). Dénombrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les palindromes à n chiffres.

Exercice 3. Dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il de tiercés ? De quintés ?

Exercice 4. Dans un groupe de 41 élèves tous nés en 2004, de combien de façons différentes peut-on associer à chaque élève sa date d'anniversaire ? Combien, et quelle proportion, de ces façons correspond au cas où au moins deux élèves sont nés le même jour ?

Exercice 5. *Dans cet exercice on s'intéresse uniquement à la position des personnes les unes par rapport aux autres, autrement dit les tables peuvent tourner...*
De combien de façons différentes peut-on organiser 12 personnes...

1. Autour d'une table rectangulaire de deux côtés de 6 places ?
2. Autour d'une table ronde de 12 places ?
3. Autour d'une table carrée de quatre côtés de 3 places ?

Exercice 6.

1. Lors d'une soirée Salsa il y a 50 femmes et 40 hommes, qui vont danser en couple. De combien de façons différentes peut-on mettre en couple les danseurs (tous ceux qui sont en minorité vont danser, les autres en trop vont attendre) ?
2. Dans la soirée sont présents monsieur X et madame Y qui refuseront de danser ensemble. Reprendre la question.

Exercice 7. On rappelle qu'un *anagramme* d'un mot est un mot formé à partir des mêmes lettres, utilisées une et une seule fois, mais en en changeant l'ordre. Combien d'anagrammes peut-on former à partir des mots suivants ?

1. « BIO », « BCPST », « SURJECTION »,
2. « PREPA », « TRAVAIL », « BIJECTION »,
3. « ELEVE », « INJECTION », « VERSAILLES »,
4. « ANAGRAMMES », « PREPARATIONNAIRE ».

Exercice 8. Une classe de BCPST comporte 42 élèves et doit former 14 groupes de colle de 3 élèves.

1. Combien de colloscopes différents peut-on former si on suppose que le numéro de trinôme a une importance ?
2. Et si le numéro du trinôme n'a pas d'importance ?
3. En fait, il y a 41 élèves... on garde 14 trinômes, un des trinômes ne comprendra donc que 2 élèves. Reprendre les deux questions précédentes.

Exercice 9. On souhaite ranger 35 livres dans une bibliothèque.

1. De combien de façons différentes peut-on les ranger alignés sur une étagère ?
2. De combien de façons différentes peut-on les ranger sur deux étagères (chaque étagère a au moins un livre) ?
3. Et sur trois étagères ?
4. De combien de façons peut-on les ranger en vrac dans deux tiroirs (un tiroir pouvant être vide) ?
5. De combien de façons peut-on les ranger avec une partie alignés sur deux étagères et une partie en vrac dans deux tiroirs ?

Exercice 10. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \leqslant m$. Dénombrer les applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$ en montrant qu'une telle application est déterminée entièrement par son ensemble image (en tant que partie de $[\![1, m]\!]$).

Exercice 11. *Formule de Vandermonde*
Soient E, F deux ensembles disjoints, on pose $n = \mathrm{Card}(E)$, $m = \mathrm{Card}(F)$. Soit $r \in [\![0, n+m]\!]$. Démontrer la formule

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} \tag{1}$$

en dénombrant de deux façons différentes l'ensemble des parties à r éléments de $E \cup F$. En déduire une formule pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 12. *Formule d'inclusion-exclusion*

1. Soient A, B, C trois ensembles. Démontrer que :

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) + \operatorname{Card}(C) - \operatorname{Card}(A \cap B) \\ - \operatorname{Card}(A \cap C) - \operatorname{Card}(B \cap C) + \operatorname{Card}(A \cap B \cap C)\end{aligned} \tag{2}$$

2. Application : dénombrer les mots de 10 lettres écrits uniquement avec les lettres « B », « I », « O » et utilisant au moins une fois chaque lettre.
3. Plus généralement, soit une famille d'ensembles $A_1, \dots, A_n$, montrer que :

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \tag{3}$$

Exercice 13. *Il y a des infinis plus grands que d'autres*

1. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
2. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.
3. (argument diagonal de Cantor) Supposons qu'il existe une bijection φ entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Les nombres réels sont donc numérotés $r_0, r_1, \dots$ développons la partie décimale de chaque nombre :

$$\begin{aligned} r_0 &= n_0, d_{0,0} d_{0,1} d_{0,2} \dots \\ r_1 &= n_1, d_{1,0} d_{1,1} d_{1,2} \dots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

   où $\forall i \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{Z}$ (partie entière de r_i) et $\forall j \in \mathbb{N}$, $d_{i,j} \in \{0, \dots, 9\}$ (chiffres après la virgule de r_i). On forme alors un nombre ainsi : pour $j \in \mathbb{N}$ on choisit pour d_j un chiffre décimal différent de $d_{j,j}$ (par exemple on peut ajouter 1 à $d_{j,j}$, et pour 9 on prend 0). Montrer que le nombre $R = 0, d_0 d_1 d_2 \dots$ n'est pas dans l'image de φ et conclure.
4. Soit E un ensemble quelconque. On souhaite montrer que E n'est **jamais** en bijection avec $\mathcal{P}(E)$. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'appication surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$ en considérant $\{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.