Correction
TD 10
Fonctions usuelles

Exercice 1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions réelles suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{1-x^2} \qquad f_2 : x \mapsto \tan(3x) \tag{1}$$
$$f_3 : x \mapsto \sqrt{\arccos(x)} \qquad f_4 : x \mapsto \ln(2e^{2x} - 11e^x + 5) \tag{2}$$

Correction. f_1 Il faut $1 - x^2 \geqslant 0$. Cela donne $x^2 \leqslant 1$, soit $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Donc $\mathcal{D}_{f_1} = [-1, 1]$.

f_2 Il faut $3x \in \mathcal{D}_{\tan}$, le complémentaire signife $\exists k \in \mathbb{Z}$, $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3}$. Donc
$$\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

f_3 Il faut $x \in [-1, 1]$ pour définir $\arccos(x)$. Puis sur ce domaine $\arccos x \in [0, \pi]$, en particulier $\arccos(x) \geqslant 0$ donc on peut définir $\sqrt{(}\arccos(x))$. Donc en résumé $\mathcal{D}_{f_3} = [-1, 1]$.

f_4 Il faut $2e^{2x} - 11e^x + 5 > 0$. Posant $y = e^x$ cela donne $2y^2 - 11y + 5 > 0$. Ici $\Delta = 11^2 - 4 \times 2 \times 5 = 81 = 9^2$, les racines sont 5, 1/2, donc il faut $y < 1/2$ ou $y > 5$. Et comme l'exponentielle est strictement croissante cela donne $\ln(y) < \ln(1/2) = -\ln(2)$ ou $y > \ln(5)$. Donc en résumé
$$\mathcal{D}_{f_4} =]-\infty, -\ln(2)[\cup]5, +\infty[$$

□

Exercice 4. En étudiant les variations de la fonction f et le signe de $f(x) - x$, étudier le comportement des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence du type $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$, pour les suites suivantes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4} \tag{6}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(3u_n + 1) \tag{7}$$

Correction. Il reste la dernière $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \ln(3x + 1)$. D'abord il faut $3x + 1 > 0$ soit $x > -1/3$, ainsi $\mathcal{D}_f =]-1/3, +\infty[$ et c'est dans cet intervalle qu'on prendra u_0. De plus sur cet intervalle f est strictement croissante (car c'est la composée de $x \mapsto 3x + 1$, qui est bien strictement croissante, par ln). Cela signifie que si on pour en certain rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ alors en appliquant f des deux cotés on obtient $u_{n+1} < u_{n+2}$; et de même si pour un certain rang n on a $u_{n+1} < u_n$ alors on déduit $u_{n+2} < u_{n+1}$. Donc cela dépend de la comparaison de u_0 avec u_1, donc du signe de $f(x) - x$.
Posons alors la fonction $g(x) = f(x) - x$, sur $\mathcal{D}_f$. Alors on calcule
$$g'(x) = \frac{3}{3x + 1} - 1 = \frac{2 - 3x}{3x + 1}$$
qui est du signe de $2 - 3x$ (puisque $3x + 1 > 0$). Cela donne donc les variations et presque le signe de $f(x) - x$:

x	$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

mais on calcule $g(2/3) = \ln(2+1) - 2/3 > 0$ donc l'équation $f(x) = x$ a deux solutions, l'une est en fait $x = 0$, et l'autre une valeur $x_0 > 0$ qu'on ne peut déterminer plus explicitement, et on a le tableau de signe

x	$-\frac{1}{3}$		0		x_0		$+\infty$
$f(x) - x$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On a alors le comportement suivant :
- Si $u_0 = 0$: alors $u_1 = 0$ aussi et par récurrence on montre $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ (0 est un point fixe de f, la suite est constante).
- De même si $u_0 = x_0$: alors $u_1 = x_0$ aussi et par récurrence on montre $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_0$ (x_0 est un autre point fixe de f, la suite est constante).
- Si $u_0 > x_0$: alors sur ce domaine $f(x) < x$ donc $u_1 < u_0$, et par croissance $x_0 < u_1 < u_0$. On montre alors par récurrence, un utilisant la croissance de f, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 < u_{n+1} < u_n$ (la suite est décroissante et reste dans l'intervalle $]x_0, +\infty[$).
- Si $0 < u_0 < x_0$: alors sur ce domaine $f(x) > x$ donc $u_1 > u_0$ et par croissance $0 < u_1 < x_0$. On montre par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < u_{n+1} < x_0$ (la suite est croissante et reste dans l'intervalle $]0, x_0[$).
- Si $-1/3 < x < 0$: alors on ne peut pas vérifier que $f(x)$ sera encore bien dans $\mathcal{D}_f$, on ne traite donc pas ce cas...

□