

# TD 10

## Fonctions usuelles

**Exercice 1.** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions réelles suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \sqrt{1 - x^2} \qquad f_2 : x \mapsto \tan(3x) \qquad (1)$$

$$f_3 : x \mapsto \sqrt{\arccos(x)} \qquad f_4 : x \mapsto \ln(2e^{2x} - 11e^x + 5) \qquad (2)$$

**Exercice 2.** Démontrer les inégalités suivantes.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
2.  $\forall x \in ]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$
3.  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) \geq x$
4.  $\forall y \in [0, +\infty[, \arctan(y) \leq y$
5.  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \leq x$
6.  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$
7.  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

**Exercice 3.** Tracer le tableau de variation des fonctions suivantes, en déterminant d'abord le domaine de définition et les symétries.

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \qquad f_2 : x \mapsto e^{\sin(x/3)} \qquad (3)$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(1 - x^2) \qquad f_4 : x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x) \qquad (4)$$

**Exercice 4.** Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \lfloor x \rfloor \qquad f_2 : x \mapsto \frac{2x^4 - x^2 + 3}{x^5 - 2x^3 + x} \qquad (5)$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(x + 1) + \ln(x - 1) \qquad f_4 : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \qquad (6)$$

$$f_5 : x \mapsto \sin(|x|) \qquad f_6 : x \mapsto |\sin(x)| \qquad (7)$$

**Exercice 5.** En étudiant les variations de la fonction  $f$  et le signe de  $f(x) - x$ , étudier le comportement des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation de récurrence du type  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$  en fonction de  $u_0 \in \mathbb{R}$ , pour les suites suivantes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4} \qquad (8)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(3u_n + 1) \qquad (9)$$