TD 11
Systèmes linéaires

I Introduction

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1)\begin{cases}x+2y=3\\2x+3y=8\end{cases}\quad(S_2)\begin{cases}2x-3y=5\\6y-4x=2\end{cases}\quad(S_3)\begin{cases}x+3y=3\\2x+6y=6\end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases}x+y+z=1\\x-y-3z=0\\2x-y-z=3\end{cases}\quad(S_5)\begin{cases}x+y+2z=1\\x-y-z=2\\2x-y-z=4\end{cases}\quad(S_6)\begin{cases}x+2y-z=1\\x+3y+2z=6\\x+y-z=-4\end{cases}$$

II Pivot de Gauss

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases}x+t+2y=z+2\\y+t+3z=1+x\\x+z+3t+5y=5\\t+4y+5x=2+9z\end{cases}\quad(S_2)\begin{cases}x+z=y+t+3\\y+t+2z+8=3x\\x+2t+3y=z+5\\z+2x=3(1+y+t)\end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases}2(1+y-x)=t+3z\\x+3t=y+8\\x+z=y+3\\x+t+2z=y-1\end{cases}\quad(S_4)\begin{cases}z+2x=t+3+4y\\x=1+t+2y+3z\\3x=2(z+t+2+3y)\end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases}y+z+2x=0\\z=2+x\\3x=1+y\\y=z+2x\end{cases}\quad(S_6)\begin{cases}x+z+4=t+2y\\z+t+2x=9\\y+3x=5\\z+2x=y+3\\y+z+2x=t+3\end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes en fonction du paramètre $m\in\mathbb{R}$:

$$(S_1)\begin{cases}m(x-1)+y=2(z-1)\\x+y+1=-m(z-1)\\mx+y-2=m(z-1)\end{cases}\quad(S_2)\begin{cases}(m+2)x+3y=-3\\2x+(m+3)y=2\end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre le système en fonction de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases}ax+by=0\\bx+ay=1\end{cases}\tag{1}$$

III Applications

On admet pour l'instant le résultat suivant (théorème d'identification des coefficients) : soient $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0,\dots,b_m)\in\mathbb{R}^{m+1}$, soient les fonctions polynomiales $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:x\mapsto a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ et $g:x\mapsto b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$. Si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$ alors $n=m$ et $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, …, $a_n=b_n$. C'est une façon de dire que les coefficients d'un polynôme sont uniques.

Exercice 5. Montrer qu'il existe d'uniques polynômes vérifiant les conditions suivantes suivantes :

1. P de degré 2 tel que $P(-1)=1$, $P(1)=-1$, $P'(0)=-1$
2. P de degré 3 tel que $P(0)=0$, $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=5$
3. P de degré 3 tel que $P(1)=1$, $P(2)=0$, $P'(1)=-2$, $P'(2)=1$
4. P de degré 2 tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)\times P(x)$

Exercice 6. On se place dans le plan avec un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$. Soit D la droite passant par le point $A:(3,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}:(1,2)$. Soit D' la droite passant par les points $B:(2,5)$ et $C:(1,1)$.

1. Donner des équations de D et de D'.
2. Déterminer l'intersection $D\cap D'$.

Exercice 7. On se place dans l'espace avec un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit P le plan passant par les points $A:(-3,2,1)$, $B:(1,2,2)$, $C:(5,-1,3)$ et soit Q le plan passant par $A:(2,1,1)$ et orthogonal au vecteur $\vec{u}:(-1,4,2)$.

1. Donner des équations de P et de Q.
2. Déterminer l'intersection $P\cap Q$.