

TD 12

Calculs de dérivées et d'intégrales

I Dérivées

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir étudié l'ensemble de dérivabilité :

$$f_1 : x \mapsto 2^x + \tan(3x) \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x^3}{\ln(x)} \qquad (1)$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(e^x - 2) \qquad f_4 : x \mapsto \arctan^4(\sqrt[4]{x}) \qquad (2)$$

$$f_5 : x \mapsto \ln(\sin(x)) + \sin(\ln(x)) \qquad f_6 : x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \qquad (3)$$

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto x^3y^2 - 5xy^2 + 3x^2 - y + 1 \qquad f_2 : (x, y) \mapsto e^x \cos(y) + e^{-x} \sin(y) \qquad (4)$$

$$f_3 : (x, y) \mapsto (x^2 - y^3)^4 \qquad f_4 : (x, y, z) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (5)$$

II Intégrales

Exercice 3. Donner des primitives des fonctions suivantes, directement, en déterminant bien sur quel ensemble la primitive existe :

$$f_1 : x \mapsto \sin(2x) \cos(3x) \qquad f_2 : x \mapsto \cos^4(x) \qquad (6)$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{(\ln(x))^3}{x} \qquad (7)$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2} \qquad f_6 : x \mapsto \frac{1}{x^2+4} \qquad (8)$$

Exercice 4. Calculer, à l'aide d'une primitive, les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3} \tan(x) \, dx \qquad I_2 = \int_0^1 \sqrt{2t+1} \, dt \qquad (9)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \sin^2(4x) \, dx \qquad I_4 = \int_2^4 \frac{dx}{2+3x} \qquad (10)$$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2} \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} \qquad (11)$$

Exercice 6. Montrer qu'il existe des nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad \frac{1}{4-t^2} = \frac{a}{2+t} + \frac{b}{2-t} \qquad (12)$$

puis calculer $\int_{-1}^1 \frac{dt}{4-t^2}$.

Exercice 7. Donner des primitives des fonctions suivantes, en utilisant une (ou plusieurs) intégrations par partie :

$$f_1 : x \mapsto x^2 \ln(x) \qquad f_2 : x \mapsto x^2 \sin(x) \qquad (13)$$

$$f_3 : x \mapsto x^2 2^x \qquad f_4 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^3} \qquad (14)$$

Exercice 8. Calculer simultanément

$$I = \int_0^\pi \sin(t)e^t \, dt \qquad J = \int_0^\pi \cos(t)e^t \, dt \qquad (15)$$

Exercice 9. Calculer les intégrales avec le changement de variable indiqué :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \, dt \quad (t = \cos(\theta)) \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4} \quad (x = 2t) \qquad (16)$$

$$I_3 = \int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) \, dx \quad (x = t^2) \qquad I_4 = \int_1^e \sin(\pi \ln(x)) \, dx \quad (x = e^t) \qquad (17)$$