TD 13 correction
Matrices

Exercice 9.

- A : binôme de Newton

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2I} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \tag{1}$$

où $(2I)^n = 2^n I$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et on remarque $B^n = B$ pour tout $n \geqslant 1$. On vérifie bien $2I \cdot B = B \cdot 2I$. On a alors

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} B^k = 2^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B \tag{2}$$

soit

$$A^n = 2^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \right) B \tag{3}$$

Tout ceci se simplifie en $2^n I + (3^n - 2^n)B$, en fait

$$\forall n \geqslant 1, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 3^n - 2^n & 3^n \end{pmatrix} \tag{4}$$

- B : binôme de Newton avec

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{J} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \tag{5}$$

On vérifie bien $JI = IJ$, on a $I^n = I$, $\forall n \geqslant 0$ et si on pose K la matrice avec uniquement des 1 alors $J = 2K$ et $J^n = 2^n \times 3^{n-1} K$, $\forall n \geqslant 1$. Alors

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-I)^{n-k} (2K)^k = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^k 3^{k-1} K \tag{6}$$

soit

$$B^n = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^k 3^{k-1} \right) K \tag{7}$$

Sous la somme on a $\frac{1}{3} \times (-1)^{n-k} \times 6^k$ et donc

$$B^n = (-1)^n I + \frac{5^n + (-1)^n}{3} K \tag{8}$$

- C : on reconnait bien une décomposition identité + matrice nilpotente

$$C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \tag{9}$$

où on calcule aisément

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = 0 \tag{10}$$

Ainsi, au moins pour $n \geqslant 2$

$$C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} A^k = I + nA + \binom{n}{2} A^2 \tag{11}$$

soit

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & ni & -\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & ni \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Exercice 10.

- A : le déterminant marche tout autant dans ce cas,

$$\det(A) = -i(1+i) - i(2-i) = -i + 1 - 2i - 1 = -3i \neq 0 \tag{13}$$

donc A est inversible, et

$$A^{-1} = \frac{-1}{3i} \begin{pmatrix} -i & -2+i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} \tag{14}$$

- B : à la main, on trouve

$$B^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

- C : on place $-L_1$ au-dessus et on échelonne

$$C \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix} \tag{16}$$

puis on continue encore une étape $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$C \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Si $\lambda \neq 1$ alors C est de rang 3, donc inversible ; si $\lambda = 1$ alors on ré-écrit

$$C \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

qui est de rang 2 (quitte à éliminer l'une des deux lignes). Dans ce cas on trouve

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\lambda-1} & \frac{1}{\lambda-1} & -\frac{3}{\lambda-1} \\ -2\frac{\lambda+1}{\lambda-1} & -\frac{\lambda}{\lambda-1} & \frac{2\lambda+1}{\lambda-1} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Exercice 11. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. On trouve

$$\begin{aligned} A_\alpha A_\beta &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = A_{\alpha+\beta} \end{aligned} \tag{20}$$

   d'après les formules de trigonométrie.

2. On en déduit $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On déduit aussi de la première propriété $A_\theta A_{-\theta} = A_{-\theta} A_\theta = A_0$, mais A_0 est la matrice identité I_2. Donc A_θ est inversible et $(A_\theta)^{-1} = A_{-\theta}$.
4. On en déduit que $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle. Cela signifie par définition que pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $A_{i,j} = 0$ si $i \geqslant j$. On démontre alors par récurrence sur $p > 0$ la propriété $\mathcal{P}(p)$: « A^p vérifie que pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$ alors $[A^p]_{i,j} = 0$ si $i \geqslant j - p + 1$ ».

- Pour $p = 1$: c'est l'hypothèse de départ $A_{i,j} = 0$ si $i \geqslant j$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$. Alors $A^{p+1} = AA^p$ dont le coefficient (i, j) est

$$[A^{p+1}]_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} A_{i,r} [A^p]_{r,j} \tag{21}$$

  Dans cette somme, à cause de A, les termes $A_{i,r}$ sont nuls si $i \geqslant r$; et à cause de l'hypothèse de récurrence, ils sont nuls si $r \geqslant j - p + 1$. Il reste donc dans tous les cas

$$[A^{p+1}]_{i,j} = \sum_{i+1 \leqslant r \leqslant j-p} A_{i,r} [A^p]_{r,j} \tag{22}$$

  Si on prend maintenant i et j tels que $i \geqslant j - p$ alors ceci est une somme vide, et donc $[A^{p+1}]_{i,j} = 0$. Ceci démontre $\mathcal{P}(p+1)$.

Alors par récurrence $\mathcal{P}(p)$ est démontrée pour tout $p > 0$. La propriété $\mathcal{P}(n)$ dit bien que A^n est la matrice nulle.