TD 13
Matrices

I Calculs, produits et puissances

Exercice 1. Calculer tous les produits possibles qui ont un sens parmi les six matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Exercice 2. Calculer les puissances des matrices suivantes en conjecturant le résultat puis en le démontrant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 6 & -14 & -12 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Exercice 3. Calculer les puissances des matrices suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} (a \in \mathbb{R}) \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Exercice 4. Pour les matrices suivantes, déterminer deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n I$. On cherchera d'abord par analyse-synthèse une relation de récurrence sur les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -30 \\ -9 & -19 & 45 \\ -3 & -6 & 14 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

II Échelonnage et rang

Exercice 5. En échelonnant les matrices avec la méthode du pivot de Gauss, déterminer le rang des matrices suivantes, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 3 & a \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Exercice 6. Soit X un vecteur colonne de taille n. Quel est le rang de X^tX ?

III Inversion

Exercice 7. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et donner leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Exercice 8.

1. Calculer A^2, l'exprimer en fonction de A et I_3 puis en déduire A^{-1} par des manipulations algébriques.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -30 \\ -9 & -19 & 45 \\ -3 & -6 & 14 \end{pmatrix} \tag{9}$$

2. Calculer $A + A^2$ et A^3 puis en déduire A^{-1} par des manipulations algébriques.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Exercice 9. 1. Soient A, B deux matrices carrées de même taille. On suppose qu'il existe une matrice P, elle aussi carrée de même taille et inversible, telle que $B = P^{-1}AP$ (on dit alors que les matrices A et B sont *semblables*).

(a) Montrer que pour tout $N \geqslant 0$, $B^N = P^{-1}A^N P$.

(b) En déduire une expression de A^N en fonction de B^N.

2. Dans les cas suivants, montrer que la matrice P est inversible, puis calculer $P^{-1}AP$ puis $(P^{-1}AP)^N$ et en déduire toutes les puissances de A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 22 & 14 & -4 \\ 26 & 15 & -3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{13}$$