TD 14 correction
Équations différentielles

Exercice 3. On ne peut pas trouver de solution particulière sous forme Ae^{-t} ni même $(At+B)e^{-t}$ — en effet, e^{-t} et te^{-t} étant eux-même solutions de l'équation différentielle homogène associée, remplacer $x(t)$ par une telle forme de solution particulière donnera toujours zéro à gauche et ne permet pas de déterminer A ou B.
On trouve par contre une solution particulière sous forme At^2e^{-t} (ou $(At^2+Bt+C)e^{-t}$, mais la partie en B et C s'annule quand on remplace dans l'équation, on peut les choisir quelconques), avec $A = \frac{1}{2}$.
Ensemble des solutions : les $t \mapsto \frac{1}{2}t^2e^{-t} + (\lambda t + \mu)e^{-t}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Si on a compris cela, alors on a compris comment à chaque fois trouver la forme de la solution particulière, quitte à monter de un ou deux degrés, quand la solution particulière serait elle-même déjà solution de l'équation homogène.

Exercice 4. (E_1) $y_P(x) = Ae^{2x}$ est solution si et seulement si

$$5Ae^{2x} = e^{2x}$$

On trouve $A = \frac{1}{5}$.
Solutions : les $x \mapsto \frac{1}{5}e^2 + \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$.

(E_2) $y_P(x) = (Ax+B)\cos(x) + (Cx+D)\sin(x)$ est solution si et seulement si

$$((A+C)x + (A+B+D))\cos(x) + ((A+C)x + (D+B+C))\sin(x) = (1x+0)\cos(x) + (0x+0)\sin(x)$$

On trouve $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$.
Solutions : les $x \mapsto \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}(x-1)\sin(x) + Ce^{-x}$.

(E_3) *L'énoncé corrigé est $y = y'' + xe^{3x}$ avec $y_P(x) = (Ax+B)e^{3x}$ (A, $B \in \mathbb{R}$).*
$y_P(x) = (Ax+B)e^{3x}$ est solution si et seulement si

$$(-8Ax + (-6A-8B))e^{3x} = (1x+0)e^{3x}$$

On trouve $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{3}{32}$.
Solutions : les $x \mapsto \frac{1}{32}(-4x+3)e^{3x} + \lambda e^{-x} + \mu e^x$.

(E_4) *L'énoncé corrigé est $y' + y'' = 2y + x^2$, avec $y_P(x) = P(x)$ (P polynôme de degré 2).*
$y_P(x) = Ax^2 + Bx + C$ est solution si et seulement si

$$(-2A)x^2 + (2A-2B)x + (2A+B-2C) = 1x^2 + 0x + 0$$

On trouve $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{4}$.
Solutions : les $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \lambda e^{-2x} + \mu e^x$.

(E_5) *L'énoncé corrigé est $y'' - 4y' + 3y = x^2\cos(2x)$, avec $y_P(x) = P(x)\cos(2x) + Q(x)\sin(2x)$ (P, Q polynômes de degré 2).*
$y_P(x) = (Ax^2+Bx+C)\cos(2x) + (Dx^2+Ex+F)\sin(2x)$ est solution si et seulement si . . .
On trouve $y_P(x) = -\frac{1}{274625}(4225x^2 + 41080x + 23042)\cos(2x) - \frac{8}{274625}(4225x^2 + 3055x - 1268)\sin(2x)$.

(E_6) *L'énoncé corrigé est $y'' + 4y = \sin(2x) + 3\cos(2x)$, avec $y_P(x) = Ax\sin(2x) + Bx\cos(2x)$ (A, $B \in \mathbb{R}$).*
$y_P(x) = Ax\sin(2x) + Bx\cos(2x)$ est solution si et seulement si

$$-4B\sin(2x) + 4A\cos(2x) = 1\sin(2x) + 3\cos(2x)$$

On trouve $A = \frac{3}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$.
Solutions : les $x \mapsto \frac{3}{4}x\sin(2x) - \frac{1}{4}x\cos(2x) + \lambda\sin(2x) + \mu\cos(2x)$.

(E_7) $y_P(x) = Axe^x\cos(x) + Bxe^x\sin(x)$ est solution si et seulement si

$$2Be^x\cos(x) - 2Ae^x\sin(x) = 1e^x\cos(x) + 0e^x\sin(x)$$

On trouve $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$.
Solutions : les $x \mapsto \frac{1}{2}xe^x\sin(x) + (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))e^x$.

Exercice 5. (E_1) On veut $y_P(t) = C(t)e^{-3t}$ avec $C'(t) = te^{5t}$. IPP.
Solutions : les $t \mapsto \left(\frac{1}{5}t - \frac{1}{25}\right)e^{2t} + Ce^{-3t}$.

(E_2) On veut $y_P(t) = C(t)t^{-4}$ avec $C'(t) = t^4\ln(t)$. IPP.
Solutions : les $t \mapsto \frac{1}{4}\ln(t) - \frac{1}{16} + Ct^{-4}$.

(E_3) On veut $y_P(t) = C(t)t^5$, avec $C'(t) = t^2$. Direct.
Solutions : les $t \mapsto \frac{1}{3}t^8 + Ct^5$.

(E_4) Attention aux domaines. Sur $]-\pi/2, \pi/2[$ au moins, on pour l'équation homogène $y'(t) = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}y(t)$, une primitive du coefficient est $\ln(\cos(t))$, solutions $Ce^{\ln(\cos(t))} = C\cos(t)$. Or cherche $y_P(t) = C(t)\cos(t)$, solution si $C'(t)\cos^2(t) = 1$ soit $C'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$, une primitive est la fonction tangente, et alors $y_P(t) = \tan(t) \times \cos(t) = \sin(t)$.
Bref, les solutions : $t \mapsto \sin(t) + C\cos(t)$, qui est solution sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(E_5) On veut $y_P(t) = C(t)t^3$, avec $C'(t) = \frac{t}{1+t^4}$. Une primitive : $\frac{1}{2}\arctan(t^2)$.
Solutions : les $t \mapsto \frac{1}{2}t^3\arctan(t^2) + Ct^3$.

(E_6) On veut $y_P(t) = C(t)e^{3t}$, où $C'(t) = (t^2+t+1)e^{-3t}$. Classique : deux IPP consécutives en dérivant le polynôme.
Solutions : les $t \mapsto -\frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t - \frac{14}{27} + Ce^{3t}$.

Exercice 6. Tous les deux vérifient : $y'' = y' + 2y$, $z'' = z' + 2z$.
Avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$, $z(0) = 1$, $z'(0) = 5$, on trouve :
$y(t) = 2e^{2t} - 2e^{-t}$ et $z(t) = 2e^{2t} - e^{-t}$.

Exercice 10. (analyse) En dérivant la relation $f'(x) = f(-x)$ on trouve $f''(x) = -f(x)$. Donc par nos connaissences sur les équations différentielles f est nécessairement de la forme $A\cos(x) + B\sin(x)$. Alors $f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$ et $f(-x) = A\cos(x) - B\sin(x)$, donc en fait $A = B$.
Synthèse : ce sont toutes les $x \mapsto A(\sin(x) + \cos(x))$.