TD 14 correction
Équations différentielles

Exercice 8.

- (E_1) : L'équation homogène est $x'' + x' - 6x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + r - 6 = 0$, racines 2, -3. Solutions : les $x_H(t) = K_1 e^{2t} + K_2 e^{-3t}$, pour $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Une solution partiulière sous forme $x(t) = At^2 + Bt + C$ où $(A, B, C) \in \mathbb{R}^2$ (on prend bien entendu le polynôme de degré au moins 2 sinon on n'aura jamais t^2) : alors
  $$x(t) = At^2 + Bt + C \tag{1}$$
  $$x'(t) = 2At + B \tag{2}$$
  $$x''(t) = 2A \tag{3}$$
  qui est solution si et seulement si (en remplaçant) $\forall t \in \mathbb{R}$,
  $$-6At^2 + (2A - 6B)t + (2A + B - 6C) = -30t^2 - 8t + 1 \tag{4}$$
  On veut alors
  $$\begin{cases} -6A = -30 \\ 2A - 6B = -8 \\ 2A + B - 6C = 1 \end{cases} \tag{5}$$
  et on trouve $A = 5$, $B = 3$, $C = 2$. Une solution particulière est $x_P(t) = 5t^2 + 3t + 2$.
  Conclusion :
  $$\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ t \mapsto 5t^2 + 3t + 2 + K_1 e^{2t} + K_2 e^{-3t} \;\middle|\; (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \tag{6}$$

- (E_2) : L'équation homogène est $x'' - 3x' + 2x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, racines 1, 2. Solutions : les $x_H(t) = K_1 e^t + K_2 e^{2t}$, pour $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Une solution particulière sous forme $x(t) = (At^3 + Bt^2 + Ct)e^t$ où $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$: alors
  $$x(t) = (At^3 + Bt^2 + Ct)e^t \tag{7}$$
  $$x'(t) = (At^3 + (3A + B)t^2 + (2B + C)t + C)e^t \tag{8}$$
  $$x''(t) = (At^3 + (6A + B)t^2 + (6A + 4B + C)t + (2B + 2C))e^t \tag{9}$$
  (toujours tout garder sous forme polynôme $\times$ exponentielle, et les polynômes eux-même groupés par puissances), qui est solution si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}$,
  $$\Big(-3At^2 + (6A - 2B)t + (2B - C) \Big) e^t = (-3t^2 + 10t - 7)e^t \tag{10}$$
  On veut alors
  $$\begin{cases} -3A = -3 \\ 6A - 2B = 10 \\ 2B - C = -7 \end{cases} \tag{11}$$
  et on trouve $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$. Une solution particulière est $x_P(t) = (t^3 - 2t^2 + 3t)e^t$.
  Conclusion :
  $$\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{ t \mapsto (t^3 - 2t^2 + 3t)e^t + K_1 e^t + K_2 e^{2t} \;\middle|\; (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \tag{12}$$

- (E_3) : L'équation homogène est $x'' + x' - 2x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$, racines $1, -2$. Solutions : les $x_H(t) = K_1 e^t + K_2 e^{-2t}$, pour $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Une solution particulière sous forme $x(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$: alors
  $$x(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t) \tag{13}$$
  $$x'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \tag{14}$$
  $$x''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) \tag{15}$$
  qui est solution si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}$
  $$(-6A + 2B)\cos(2t) + (-2A - 6B)\sin(2t) = 8\sin(2t) \tag{16}$$
  On veut alors
  $$\begin{cases} -6A + 2B = 0 \\ -2A - 6B = 8 \end{cases} \tag{17}$$
  et on trouve $A = -\frac{2}{5}$, $B = -\frac{6}{5}$. Une solution particulière : $x_P(t) = -\frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{6}{5}\sin(2t)$.
  Conclusion :
  $$\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{ t \mapsto -\frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{6}{5}\sin(2t) + K_1 e^t + K_2 e^{-2t} \;\middle|\; (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \tag{18}$$

- (E_4) : L'équation homogène est $x'' - 2x' + 2x = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$, racines $1 \pm i$. Solutions : les $x_H(t) = e^t(K_1\cos(t) + K_2\sin(t))$, pour $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.
  Solution particulière sous forme $x(t) = Ate^t\cos(t) + Bte^t\sin(t)$: alors on dérive (calcul un peu pénible, grouper ensemble deux des trois termes de $te^t\cos(t)$ et

$te^t \sin(t)$ pour dériver comme un produit, toujours garder sous forme polynôme $\times$ exponentielle $\times$ sinus ou cosinus)

$$x(t) = Ate^t \cos(t) + Bte^t \sin(t) \tag{19}$$
$$x'(t) = ((A+B)t + A)e^t \cos(t) + ((-A+B)t + B)e^t \sin(t) \tag{20}$$
$$x''(t) = (2Bt + (2A+2B))e^t \cos(t) + (-2At + (-2A+2B))e^t \sin(t) \tag{21}$$

qui est solution si et seulement si (on remplace et on simplifie tout) $\forall t \in \mathbb{R}$

$$2Be^t \cos(t) - 2Ae^t \sin(t) = e^t \cos(t) \tag{22}$$

On veut alors

$$\begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \tag{23}$$

donc $B = \frac{1}{2}$ et $A = 0$. Une solution particulière : $x_P(t) = \frac{1}{2}te^t \sin(t)$.
Conclusion :

$$\mathcal{S}_{(E_4)} = \left\{ t \mapsto \frac{1}{2}te^t \sin(t) + e^t(K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t)) \;\middle|\; (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \tag{24}$$

Exercice 9. Si f est solution, on dérive une fois et f doit vérifier $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(-x)$ ce qui est aussi $-f(x)$. Donc f vérifie l'équation différentielle $f'' = -f$. Donc il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
Mais attention ce n'est pas tout. **Réciproquement**, une telle fonction vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $-A\sin(x) + B\cos(x) = A\cos(x) - B\sin(x)$ ce qui est possible si et seulement si $A = B$.
Conclusion : ce sont toutes les fonctions $x \mapsto A(\cos(x) + \sin(x))$, pour $A \in \mathbb{R}$.