TD 14
Équations différentielles

Exercice 1. Donner *toutes* les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 suivantes, d'inconnue la fonction $y(t)$.

$$(E_1) : 2y + 3y' = 0 \qquad (E_2) : y' - 5y = 0 \tag{1}$$
$$(E_3) : y' + \sin(t)y = 0 \qquad (E_4) : y' = y\sqrt{t} \tag{2}$$
$$(E_5) : (1+t^2)y' + y = 0 \qquad (E_6) : 3ty' = y \tag{3}$$
$$(E_7) : y' = 2y + 1 \qquad (E_8) : y' + k(y - y_0) = 0 \quad (k > 0, y_0 \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

Exercice 2. Donner *toutes* les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes, d'inconnue la fonction $y(t)$.

$$(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (E_2) : y'' - 2y' + 5y = 0 \tag{5}$$
$$(E_3) : y'' + 9y = 6y' \qquad (E_4) : y'' + 3 = y' + 2y \tag{6}$$
$$(E_5) : y'' + 4y = 4y' + 1 \qquad (E_6) : y'' - 2y' + 3y = 15 \tag{7}$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes avec la condition initiale donnée.

(E_1) $2y' + 3y = 4$ avec $y(1) = 5$
(E_2) $\frac{1}{2}(y'' + 5y) = y' + 5$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
(E_3) $y'' = 5 + 3y$ avec $y(0) = \frac{1}{3}$, $y(\frac{1}{3}) = 0$
(E_4) $y'' + 6y' + 9y = 1$ et $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Exercice 4. Chercher une solution particulière y_P sous la forme proposée, pour les équations différentielles suivantes d'inconnue la fontion $y(t)$, puis donner *toutes* les solutions.

(E_1) $y + y' = t\cos(t)$, avec $y_P(t) = P(t)\cos(t) + Q(t)\sin(t)$ où $P(t)$, $Q(t)$ sont des polynômes.
(E_2) $y' + y'' = 2y + t^2$, avec $y_P(t)$ un polynôme.
(E_3) $y = y'' + te^t$ avec $y_P(t) = P(t)e^t$ où $P(t)$ est un polynôme.
(E_4) $y' - 2y = t^3e^t$, avec $y_P(t) = P(t)e^t$ où $P(t)$ est un polynôme.
(E_5) $y'' - 2y' + y = te^{2t}$, avec $y_P(t)$ un polynôme.
(E_6) $y' + 2y = 1 + t^2 + \sin(t) + e^{2t}$ en cherchant une solution particulière pour chacun des termes de droite et en les superposant, à partir de respectivement une fonction constante, un polynôme, une combinaison linéaire $a\sin(t) + b\cos(t)$ ($a, b \in \mathbb{R}$), et un multiple de e^{2t}.
(E_7) $y'' - 4y' + 3y = t^2\cos(t)$, avec $y_P(t) = P(t)\cos(t) + Q(t)\sin(t)$ où $P(t)$, $Q(t)$ sont des polynômes.

Exercice 5. *Cours : méthode de variation de la constante*
Soit l'équation différentielle d'ordre 1 $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ où a, b sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $(H) : y' = a(t)y$ l'équation homogène associée, soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$ sur I.

1. Montrer que pour toute fonction y dérivable sur I, il existe une fonction $C(t)$ dérivable sur I telle que $\forall t \in I$, $y(t) = C(t) \times e^{A(t)}$.
2. Montrer qu'alors y est solution de (E) si et seulement si $\forall t \in I$, $C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.
3. En déduire que (E) a toujours au moins une solution particulière, puis donner l'ensemble des solutions de (E).
4. Application : donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes.

$$(E_1) : y' + 3y = t^2e^{2t} \qquad (E_2) : ty' + y = \sqrt{t} \tag{8}$$
$$(E_3) : ty' = 5y + t^8 \qquad (E_4) : y' + \frac{3y}{t} = \ln(t) \tag{9}$$

Exercice 6.
1. Soit l'équation différentielle non-linéaire $(E) : y' = (1 + y^2)e^{-t}$. En posant $u(t) = \arctan(y(t))$, donner une équation différentielle vérifiée par u puis déterminer toutes les solutions de (E).
2. Même méthode avec $(E) : y' = y^2$ en posant $u(t) = \frac{1}{y(t)}$, en supposant $y(t) > 0$.