TD 15 correction
Géométrie

Exercice 1. 2. Il est nécessaire de donner un nom différent aux variables de droite, par exemple $(s', t') \in \mathbb{R}^2$. On ré-écrit cela comme un système linéaire à 3 équations et 4 inconnues :

$$\begin{cases} s+t-s+t'=1 \\ s+2t-2s'+t'=-2 \\ s+3t-2t'=0 \end{cases}$$

On peut alors prendre t' libre, $s' = t' + \frac{5}{3}$, $t = s' - \frac{4}{3}$, $s = -s' + 4$. Reportant dans l'une des deux équations (celle de $\mathcal{P}$ ou de $\mathcal{P}'$ peu importe !) on trouve bien une équation de droite, par exemple dans $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{7}{3} + t' \\ z = 2 + 2t' \end{cases} \quad , \ t' \in \mathbb{R}$$

Exercice 10. 2. Équation de plan $\mathcal{P} : y = -1+2x+z$ (prendre cette fois x, z libres, pourquoi pas ?), le plan passe par $B = (0, -1, 0)$ et a les deux vecteurs directeurs $\vec{u} = (1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, 1)$. Le projeté $H = (x, y, z)$ doit vérifier $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = 0$, et $H \in \mathcal{P}$. Cela conduit aux trois équations

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ y+z=5 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

admettant pour unique solution $H = (1/3, 7/3, 8/3)$.

Exercice 11. On obtient l'équation $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = \lambda$ qui se ré-écrit (développer et refactoriser)

$$\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \lambda + \frac{1}{4}\left((x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2\right)$$

et on obtient un cercle, un point ou un ensemble vide, selon le signe du terme de droite.

Exercice 12. On peut étudier les équations $AM^2 = BM^2 = CM^2$ pour $M = (x, y)$; ou bien écrire une équation de cercle de la forme $x^2 + y^2 + ax + by = c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est à déterminer tel que les 3 points soient bien sur le cercle.
On trouve le cercle de rayon 5 et de centre $(-1, 1)$.

Exercice 13. 1. On suppose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\|\vec{u}\| \neq 0$, $\|\vec{v} \neq 0\|$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$. Alors en prenant le produit scalaire avec $\vec{u}$ on trouve

$$\alpha\vec{u} \cdot \vec{u} + \beta \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{=0} = 0$$

d'où $\alpha\|\vec{u}\| = 0$ d'où $\alpha = 0$. De même en prenant le produit scalaire avec $\vec{v}$ on déduit $\beta = 0$. Donc les vecteurs sont non-colinéaires.

2. Idem avec 3 vecteurs.
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. La somme donne $2\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\big)$.
   Dans un parallélogramme $ABCD$, posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont les deux diagonales.