TD 15 correction
Géométrie

Exercice 11. 1. $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A = (5, 7, 1)$ et dirigé par $\overrightarrow{AB} = (-12, -19, 2)$ et $\overrightarrow{AC} = (-7, -2, -17)$. Paramétrage :

$$\begin{cases} x = 5 - 12t - 7s \\ y = 7 - 19t - 2s \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + 2t - 17s \end{cases} \tag{1}$$

Équation cartésienne : $3x - 2y - z = 0$.

2. $\mathcal{D}$ est la droite passant par $D = (6, 0, 3)$ et dirigée par $\overrightarrow{DE} = (-12, -14, -13)$. Paramétrage :

$$\begin{cases} x = 6 - 12t \\ y = -14t \\ z = 3 - 13t \end{cases} \tag{2}$$

3. On reporte les valeurs de (x, y, z) paramétrées par t dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$3(6 - 12t) - 2(-14t) - (3 - 13t) = 0 \tag{3}$$

On trouve $t = -3$. On reporte alors dans le paramétrage de $\mathcal{D}$, on trouve

$$(x, y, z) = (42, 42, 42) \tag{4}$$

Exercice 12. $\mathcal{P}$ est le plan passant par $A = (0, 2, 1)$ et dirigé par $\overrightarrow{AB} = (1, -4, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$. On trouve l'équation cartésienne $2x + y - 2z = 0$, et le vecteur normal $\vec{n} = (2, 1, -2)$.
$\mathcal{P}'$ est le plan passant par $A' = (-1, -1, 3)$ et dirigé par $\overrightarrow{A'B'} = (-1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{A'C'} = (-2, 2, -1)$. On trouve l'équation cartésienne $2x + y - 2z = -9$, et le vecteur normal $\vec{n}' = (2, 1, -2)$.
Les plans sont donc parallèles.
Pour calculer la distance entre, il suffit par exemple de projeter orthogonalement un point de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}'$ et de calculer la distance au projeté (comme les plans sont parallèles, cela ne dépend en fait pas du point de $\mathcal{P}$ choisi). On projette A. On peut même chercher le projeté sous forme $H = A + t\vec{n}$, et chercher à quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$ ceci vérifie l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$: on trouve $A + t\vec{n} = (2t, 2 + t, 1 - 2t)$ vérifie $2x + y - 2z = -9$ si et seulement si $t = -1$, soit le point $H = (-2, 1, 3)$. On calcule alors $AH = 3$.