# Correction
# TD 15
# Limites de suites

**Exercice 4.** Étudier la nature des suites suivantes et déterminer les limites si elles existent.

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\exp(k)} \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\exp(k)+1} \tag{1}$$

$$D_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln(k)} \qquad E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k - 1} \qquad F_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \tag{2}$$

**Correction.** *A* Si $k \geqslant 2$ alors $\ln(k) \leqslant k$ donc $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\ln(k)}$. Ainsi

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$$

mais la suite qui apparait à gauche tend vers $+\infty$ (exercice 1). Donc (gros gendarmes) $A_n$ tend vers $+\infty$.

*B* C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$, donc

$$B_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}}$$

Mais $0 < \frac{1}{e} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = 0$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} B_n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$.

*C* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e^k + 1 \geqslant e^k$ donc $\frac{1}{e^k+1} \leqslant \frac{1}{e^k}$ et ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{e^k}$$

mais la suite de droite converge en croissant, par la question précédente, et donc est majorée (par sa limite). Ainsi la suite $(C_n)$, qui est aussi croissante, est majorée. Donc par le théorème de convergence monotone $(C_n)$ est convergente (et on ne peut pas forcément donner sa limite).

*D* Complètement similaire au cours pour $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On démontre que les suites $(D_{2n})$ et $(D_{2n+1})$ sont adjacentes. Donc $(D_n)$ converge. On ne peut pas forcément exprimer la limite.

*E* Beaucoup de possibilités. On ne peut pas minorer $4^k - 1$ par $4^k$, mais minorer par $3^k$ suffit, on vérifie aisément que $3^k \leqslant 4^k - 1$ pour tout $k \geqslant 1$. Alors $\frac{1}{4^k-1} \leqslant \frac{1}{3^k}$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k - 1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$$

mais la suite de droite converge, pour exactement la même raison que la suite $(B_n)$. Donc $(E_n)$, qui est croissante car $E_n - E_{n-1} = \frac{1}{4^n-1} \geqslant 0$, converge par le théorème de convergence monotone.

*F* Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $n^2 + 1 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + n$ donc $\sqrt{n^2+1} \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant \sqrt{n^2+n}$ donc $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

soit (les deux extrémités ne dépendent pas de $k$)

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Mais dans cet encadrement, les deux termes qui encadrent $F_n$ convergent vers 1 : on écrit comme d'habitude $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ et $\sqrt{n^2+n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$. Donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} F_n = 1$.

□

**Exercice 7.** Calculer les limites des suites suivantes pour $n \to +\infty$.

**Correction.** Il reste $J_n = \frac{n!}{n^n}$. En écrivant

$$J_n = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n}{n \times n \times \cdots \times n \times n}$$

il est facile de conjecturer que la limite sera 0. Mais il suffit d'écrire par exemple que

$$J_n = \frac{1}{n} \times \underbrace{\left(\frac{2}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}\right)}_{=u_n}$$

avec $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc (produit avec une suite bornée) $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$. □