TD 15
Limites de suites

I Sommes

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $x \in [k, k+1]$ alors $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$.
2. En déduire que $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
3. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant S_n$ puis que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
3. Calculer $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ en remarquant que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ puis conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie.

Exercice 3. Étudier la nature des suites suivantes et déterminer les limites si elles existent.

$$A_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\exp(k)} \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\exp(k)+1} \tag{1}$$

$$D_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln(k)} \qquad E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k-1} \qquad F_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \tag{2}$$

II Suites implicites

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + nx - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x \in]0, 1[$ tel que $f_n(x) = 0$. On appelle x_n cette valeur de x.
2. En étudiant $f_n(x_{n+1})$, montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
3. Montrer que $x_n \leqslant \frac{1}{2}$ si $n \geqslant 1$.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $nx + \ln(x) = 0$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$. On note x_n cette unique solution. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^n + x^2 + 2x = 1$ a une unique solution dans $[0, +\infty[$, qu'on note x_n. Étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

III Suites de récurrence

Exercice 6. Étudier les suites suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{2u_n+3}$
3. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$
4. $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(3 + u_n)$

IV Opérations sur les limites

Exercice 7. Calculer les limites des suites suivantes pour $n \to +\infty$.

$$A_n = \frac{n! + \ln(n)}{\sqrt{n} + (-1)^n} \qquad B_n = n - \ln(n+1) \qquad C_n = \frac{(n+1)^{10}}{n!} \tag{3}$$

$$D_n = \frac{\ln(n^3+1)}{n+1} \qquad E_n = \frac{n^2 + 2^n}{\ln(n) + 3^n} \qquad F_n = n(\sqrt{4n^2+1} - 2n) \tag{4}$$

$$G_n = n^5 \ln(1 + e^{-n}) \qquad H_n = n^2 \ln(\cos(\tfrac{1}{n})) \qquad I_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

$$J_n = \frac{n!}{n^n} \qquad K_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

Exercice 8. Donner des équivalents simples des suites suivantes pour $n \to +\infty$.

$$A_n = \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-1} \qquad B_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \tag{7}$$

$$C_n = n^2 \left(e^{1/n^2} - \cos(\tfrac{1}{n})\right) \qquad D_n = \ln\left(\frac{n^3+3n^2+2n+1}{n^3+1}\right) \tag{8}$$

$$E_n = \sqrt{\cos(\tfrac{1}{n^2})} - 1 \qquad F_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} \tag{9}$$