TD 17 correction
Limites de suites

Exercice 10. On pose $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$, pour $x \geqslant 0$. Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

(1)

Tableau de signe de $f(x) - x$:

x	0		4		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

(2)

Le comportement est celui des figures 1 et 2 du cours :

- 4 est un point fixe, si $u_0 = 4$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
- Si $u_0 \in [0,4]$ alors on démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,4]$ (intervalle stable) puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle converge, la seule limite possible est 4.
- Si $u_0 \in [4,+\infty]$ alors on démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [4,+\infty]$ (intervalle stable) puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis qu'elle converge, la seule limite possible est 4.

Exercice 11. On pose $f : x \mapsto \frac{2}{2x+3}$, pour $x \geqslant 0$. Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

(3)

Tableau de signe de $f(x) - x$:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

(4)

Sachant $u_0 = 1$, on observe un comportement du type « toile d'araignée », cours figure 5. On démontre alors par récurrence, d'un seul coup :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+3} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_n \tag{5}$$

Autrement dit :

- La suite des $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans $[\frac{1}{2}, +\infty[$ (intervalle stable), et y est décroissante, donc converge vers une limite $\ell \geqslant \frac{1}{2}$.
- La suite des $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans $[0, \frac{1}{2}]$ (intervalle stable), et y est décroissante, donc converge vers une limite $\ell' \leqslant \frac{1}{2}$.

Comment conclure que c'est bien la même limite et que c'est $\frac{1}{2}$? On est plus ou moins obligé de calculer

$$f \circ f : x \mapsto \frac{4x+6}{6x+13} \tag{6}$$

en effet $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$ et de même $u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1}))$, les limites ℓ et ℓ' sont donc des points fixes de $f \circ f$. Une chose évidente est qu'un point fixe de f est automatiquement un point fixe de $f \circ f$ (si $f(x) = x$ alors $f(f(x)) = f(x) = x$), ici $\frac{1}{2}$ est point fixe. Y en-a-t-il d'autres ? Ici l'équation $(f \circ f)(x) = x$ admet pour seules solutions $x = \frac{1}{2}$ et $x = -2$, mais cette dernière n'est pas possible comme limite de nos suites positives.
Donc : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers $\frac{1}{2}$, et ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.