TD 17 correction
Polynômes

Exercice 3. On trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+1}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{x^3+1}{(x-1)^3} = 1 + \frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

Exercice 4. Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

1. D'une part avec le binôme de Newton
$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \qquad (x+1)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j$$
Le coefficient de x^k dans le produit de ces deux polynômes est alors
$$\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$
D'autre part $(x+1)^n \times (x+1)^m = (x+1)^{n+m}$, le coefficient de x^k est $\binom{n+m}{k}$. Ceci démontre l'égalité.
2. Avec $n = m = k$ on trouve directement
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$
3. Même méthode, avec des signes. On trouve
$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^i \qquad (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$
Le coefficient de x^n dans le produit est alors (avec $j = n - i$, $\binom{n}{j} = \binom{n}{i}$)
$$\sum_{i+j=n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2$$
Mais d'autre part $(1+x)^n \times (1-x)^n = \Big((1+x)(1-x)\Big)^n = (1-x^2)^n$, qui se développe avec le binôme de Newton
$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2k}$$
Ceci ne contient pas toujours de coefficient x^n : cela dépend de la parité de n. La conclusion est
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2 = \begin{cases} (-1)^k \binom{k}{n} & \text{si } n \text{ est pair } (n = 2k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Remarque : il est facile de se convaincre que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ si n est impair (la ligne du triange de Pascal est symétrique à cause de $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$), on va donc sommer exactement chaque coefficient binomial au carré une fois avec son opposé; on peut le démontrer par un changement de variable $j = n - i$ dans la somme, qui va être égale à son propre opposé).

Exercice 11. En développant simplement, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

En identifiant les coefficients, si $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ a trois racines distinctes α, β, γ, alors on peut aussi écrire $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ et donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ & = ax^3 - a(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x - a\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

L'identification des coefficients montre que $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$ (somme des racines, idem qu'en degré 2), $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$ (produit des racines, avec un signe opposé à ce qu'on connait en degré 2) et $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}$. Ces trois quantités s'appellent *fonctions symétriques élémentaires des racines.*

On trouve ensuite $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$, soit $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$. Plus généralement, on peut montrer que les fonctions symétriques élémentaires des racines permettent d'exprimer toutes les autres quantités polynomiales qui sont symétriques en les racines (ne changent pas si on permute les racines entre elles).

Exercice 12. Il est facile de vérifier que $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se factorise par x si et seulement si $a_0 = 0$, auquel cas $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = x \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} x^j$. Plus généralement, on peut factoriser par x^r si et seulement si $a_0 = \cdots = a_{r-1} = 0$. Ceci démontre automatiquement que l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P est le maximum des r tel que les coefficients $a_0, \ldots, a_{r-1}$ soient nuls. Ceux-ci sont, à des multiples près, les dérivées de P en 0 : on trouve $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$, $P''(0) = 2a_2$

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots + a_nx^n \\
P(0) &= a_0 \\
P'(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots + na_nx^{n-1} \\
P'(0) &= a_1 \\
P'(x) &= 2a_2 + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} \\
P'(0) &= 2a_2
\end{aligned}$$

et dans le cas général $P^{(k)}(0) = k!a_k$, qui est non-nul si et seulement si a_k est non-nul.
Dans le cas où on étudie une racine α quelconque, on pose $Q : x \mapsto P(x + \alpha)$. Alors 0 est racine de Q si et seulement si α est racine de P (remplacer tout simplement x par 0) et alors $P(x) = Q(x - \alpha)$. Ainsi, α est racine de P si et seulement si on peut écrire $Q(x) = x \times R(x)$ c'est-à-dire $P(x) = (x - \alpha) \times R(x - \alpha)$: ceci factorise P par $x - \alpha$.
Idem pour une racine multiple, on peut écrire $Q(x) = x^r R(x)$ si et seulement si on peut écrire $P(x) = (x - \alpha)^r R(x - \alpha)$ c'est-à-dire si et seulement si α est racine d'ordre au moins r de P.
Mais les dérivées de P en α sont les mêmes que les dérivées de Q en 0, tout simplement par la formule de dérivée d'une composée $Q'(x) = P'(x+\alpha)$ (puis évaluer en 0), et idem pour les dérivées supérieures. Ceci démontre que α est racine d'ordre au moins r de P si et seulement si les r premières dérivées de P en 0 s'annulent : $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$, ..., $P^{(r-1)}(0) = 0$.
Ce dernier résultat peut aussi se démontrer par récurrence, en poursuivant la preuve du cours α est racine d'ordre au moins 2 de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.