TD 17
Polynômes

Exercice 1. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. En exprimant de deux façons différentes le coefficient de x^k dans le polynôme $(x+1)^n \times (x+1)^m$, démontrer que (*formule de Vandermonde*)

$$\forall k \in [\![0, n+m]\!], \quad \binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \tag{1}$$

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes ? **Justifier**.

$$x \mapsto \sin(x) \qquad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \tag{2}$$

$$x \mapsto e^{x^2} \qquad x \mapsto \frac{(1+x)^{10} - (1-x)^{10}}{x} \qquad x \mapsto \cos(3\arccos(x)) \tag{3}$$

Exercice 3. Soit P un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$.

1. En posant $Q : x \mapsto P(x) - P(0)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.
2. En déduire que $Q = 0$ puis que P est constant.

Exercice 4. Soit P un polynôme. Montrer que P est une fonction paire si et seulement si tous les coefficients de degré impair de P sont nuls ; et que P est une fonction impaire si et seulement si tous les coefficients de degré pair sont nuls.

Exercice 5. Soit $f : x \mapsto e^{x^2}$. Alors f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable et on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième (en particulier $f^{(1)} = f'$, et on pose $f^{(0)} = f$).

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$.
2. Donner la relation de récurrence exprimant P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
3. Calculer P_0, P_1, P_2.
4. On note a_n le coefficient dominant de P_n. Donner une relation de récurrence sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis exprimer a_n en fonction de n.

Exercice 6. Factoriser les polynômes suivants.

$$x \mapsto x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 2 \qquad x \mapsto x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 8x + 3 \tag{4}$$

$$x \mapsto x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2 \qquad x \mapsto x^4 - 8x^2 + 15 \tag{5}$$

$$x \mapsto x^4 + 1 \qquad x \mapsto x^4 - x^2 + 1 \tag{6}$$

Exercice 7. Pour quel(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme $P : x \mapsto 3x^4 + ax^3 + 1$ admet-il une racine multiple ? Factoriser P pour chacune de ces valeurs de a.

Exercice 8. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré au plus 2, tel que $P(1) = u$, $P(2) = v$, $P(3) = w$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré au plus 2, tel que $P(1) = u$, $P'(1) = v$ et $P(2) = w$.

Exercice 9. Déterminer tous les polynômes P vérifiant les relations suivantes (*indication : commencer par s'intéresser au degré*).

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P'(x))^2 = 4P(x)$

Exercice 10. Déterminer tous les polynômes P de degré 5 tels que $x \mapsto P(x) + 1$ est factorisable par $(x-1)^3$ et $x \mapsto P(x) - 1$ est factorisable par $(x+1)^3$.

Pour aller plus loin

Exercice 11. *Une preuve alernative*
Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler comment $x^k - \alpha^k$ se factorise par $x - \alpha$, pour tout $k > 0$.
2. En déduire une factorisation de $P(x) - P(\alpha)$ par $x - \alpha$.
3. Donner une nouvelle preuve du fait que si α est une racine de P alors P se factorise par $x - \alpha$.

Exercice 12. Soit P une polynôme réel. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que si α est une racine de P, alors son conjugué $\bar{\alpha}$ est aussi une racine de P.
2. Montrer que si α est une racine de P et que $\alpha \notin \mathbb{R}$ alors P se factorise par $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$.
3. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{R}$ alors $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ est toujours un polynôme de degré 2 réel avec discriminant strictement négatif.
4. On admet que tout polynôme non nul (même à coefficients complexes !) admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Montrer que tout polynôme non nul réel se factorise comme un produit de termes $x - \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et de polynômes de degré 2 avec discriminant strictement négatif.
5. Factoriser $x \mapsto x^4 - 1$ en tant que polynôme réel.

Exercice 13. *Pour s'entrainer en Python*
On représente le polynôme $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ par la liste `P` de longeur $n+1$ telle que `P[k]` est exactement le coefficient a_k. Le fait que la liste soit de longueur $n+1$ n'implique pas que P est de degré $n+1$: les coefficients peuvent très bien être nuls. Le polynôme nul est donc aussi bien la liste vide `[]` qu'une liste comme `[0, 0, 0]`. Le polynôme x est `[0, 1]` mais on peut toujours étendre la liste par des zéros.
Écrire les fonctions suivantes :

1. `degre(P)` : donne le degré de P *(on pourra retourner* -1 *pour le polynôme nul)*
2. `somme(P, Q)`, `produit_constante(P, a)`, `produit(P, Q)` : comme leur nom l'indique
3. `puissance(P, m)` : renvoie P^m
4. `evalue(P, a)` : prend un réel a et calcule $P(a)$
5. `compose(P, Q)` : calcule $Q \circ P$
6. `derive(P)` (comme son nom l'indique), puis `derive_r(P, r)` : dérivée r-ième, par une boucle ou bien récursivement !

Application : les polynômes de Legendre L_n sont définis par $L_n(x) = \frac{1}{n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$.
Écrire un programme qui calcule L_n.
Les polynômes de Tchebychev T_n sont définis par $T_0 = 1$, $T_1 = x$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n$. Écrire un programme qui calcule T_n.