

# TD 18

## Limites de fonctions

**Exercice 1.** Étudier les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \qquad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1 + |x|} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} \right] e^x \qquad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x - \sin(x)} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(e^x) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sin(x)} \qquad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( x \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt{1 + \ln(x)}) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x} \qquad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\tan(x)} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1 - \sqrt{x}} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 + x + 1|}{3x^2 + 2x - 1} \qquad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2 + x + 1} \qquad (6)$$

**Exercice 2.** Pour tout  $x > 0$ , justifier que l'équation  $y = e^{-xy}$  d'inconnue  $y \in \mathbb{R}$  admet une unique solution. On la note  $f(x)$ . Déterminer les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .

**Exercice 3.** Donner un équivalent simple en  $x \rightarrow 0$  des fonctions suivantes.

$$x \mapsto x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \qquad x \mapsto \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} + 2 \qquad (7)$$

$$x \mapsto \ln(\cos(x)) \qquad x \mapsto \sqrt{\cos(x^2)} - 1 \qquad (8)$$

$$x \mapsto e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)} \qquad x \mapsto \left( \frac{x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}} - 1 \qquad (9)$$

**Exercice 4.** Donner un équivalent simple en  $x \rightarrow +\infty$  des fonctions suivantes.

$$x \mapsto \ln \frac{x^3 + 1}{3x^3 + 1} \qquad x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2 - x + 1} \qquad (10)$$

$$x \mapsto x \ln(1 + x^2) - 2x \ln(x) \qquad x \mapsto \tan \left( \frac{1}{x} \right) - \sin \left( \frac{1}{x} \right) \qquad (11)$$

**Exercice 5.** Soit  $f$  une fonction périodique définie sur  $\mathbb{R}$  et admettant une limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante égale à  $\ell$ .

**Exercice 6.** Soit  $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$ .

1. Donner  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
2. Calculer  $f'$  puis  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe un polynôme  $P_n$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2} \qquad (12)$$

4. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .