TD 20
Continuité

I Prolongements de fonctions

Exercice 1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis étudier leur continuité et leur éventuel prolongement par continuité.

$$f_1 : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_2 : x \mapsto \frac{1}{1+e^{1/x}} \tag{1}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{x^3-1}{\ln(x)} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \tag{2}$$

Exercice 2. On rappelle la formule de la somme des termes successifs d'une suite géométrique : pour $n \in \mathbb{N}$

$$\forall q \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{3}$$

1. Rappeler pourquoi cette formule n'a pas de sens et ne peut pas être démontrée si $q = 1$.
2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Montrer que f se prolonge par continuité en 1.
3. Quelle est la valeur en 1 ? Interprétation ?

Exercice 3. *Une nouvelle preuve*
Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ deux polynômes (pour le même n, mais on ne suppose pas nécessairement qu'il s'agit bien du degré de P et de Q).

1. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = Q(x)$. Montrer qu'alors $a_0 = b_0$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k\right) = x\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} x^k\right) \tag{4}$$

2. En déduire une nouvelle preuve — toujours par récurrence, mais sans dériver — de l'unicité des coefficients d'un polynôme.

II Les théorèmes sur la continuité

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. On suppose que f est périodique. Montrer que f est bornée.
2. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est bornée.
3. Même question si on suppose $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell'$ ($\ell, \ell' \in \mathbb{R}$).
4. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f a un minimum global.
5. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) < 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois.
6. Montrer que tout polynôme réel de degré pair admet un minimum ou un maximum global, et que tout polynôme de degré impair admet une racine.

Exercice 5. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 6. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On définit la *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ comme la quantité

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

Exercice 7. Soit un intervalle $[a, b]$.

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose $\forall x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant m$.
   (b) En déduire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.
2. Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose $\forall x \in [a, b]$, $f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant g(x) + \alpha$.

III Applications

Exercice 8. Soit I un intervalle. Soit une fonction $f : I \to I$. On suppose qu'il existe un nombre $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \tag{6}$$

1. Montrer que f est continue.

2. On admet qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.
   (a) Montrer que ℓ est unique.
   (b) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en choisissant pour u_0 un élément quelconque de I, puis en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell| \tag{7}$$

   puis en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur tout $\mathbb{R}$. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(f(x)\big)^2 = 1$. Montrer que f est constante.