TD 21 correction
Continuité

Exercice 4.

1. Théorème des bornes sur une période $[0, T]$, f est bornée sur une période donc est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Définition de limite en $+\infty$ avec $\varepsilon \leftarrow 1$: il existe $B_1 \in \mathbb{R}$ tel que si $x > B_1$ alors $|f(x)| < 1$. De même en $-\infty$, il existe $B_2 \in \mathbb{R}$ tel que si $x < B_2$ alors $|f(x)| < 1$. Théorème des bornes sur $[B_2, B_1]$: f est bornée sur cet intervalle par un certain M. Conclusion : sur $\mathbb{R}$, f est bornée par $\mathrm{Max}(1, M)$.
3. Mêmes idées mais si $x > B_1$ alors $|f(x) - \ell| < 1$ donc (inégalité triangulaire) $|f(x)| < |\ell| + 1$, et de même si $x < B_2$ alors $|f(x)| < |\ell'| + 1$. Sur $[B_2, B_1]$, f est bornée par un certain M ; f est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{Max}(M, |\ell|+1, |\ell'|+1)$.
4. On pose par exemple $A = f(0)$. Définition de limites : pour $x > B_1$ alors $f(x) > A$, et pour $x < B_2$ alors $f(x) > A$. Théorème des bornes : sur $[B_2, B_1]$, f a un minimum ; c'est alors un minimum global.
5. Définition de limite : pour $x > B_1$, $f(x) > 0$; pour $x < B_2$, $f(x) > 0$. TVI : f s'annule sur $[0, B_1]$, et aussi sur $[B_2, 0]$.
6. Polynôme de degré impair avec coefficient dominant > 0 : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (coeff dominant < 0 : c'est l'inverse), TVI, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
   Polynôme de degré pair avec coefficient dominant > 0 : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, donc admet un minimum global. Avec coefficient dominant < 0 : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, donc admet un maximum global.

Exercice 5. Si $\forall x \in [0, 1]$, $f(x^2) = f(x)$, on montre aisément par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x^{2^n}) = f(x)$. Avec $x \in [0, 1[$ fixé et $n \to +\infty$, $x^{2^n} \to 0$ et donc (continuité) le passage à la limite donne $f(0) = f(x)$. Donc f est constante sur $[0, 1[$. Mais alors f est constante sur $[0, 1]$, par exemple (encore par continuité) $f(1) = \lim_{x\to} f(x)$.

Exercice 6. Théorème des bornes : soit m le minimum de f, M le maximum, sur $[a, b]$, alors on intègre l'inégalité $\forall x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et on trouve $(b - a)m \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (b - a)M$ et donc la valeur moyenne μ vérifie en fait $m \leqslant \mu \leqslant M$. TVI : c'est une valeur atteinte par f.

Exercice 7.

1. On fixe $x_0 \in I$. Pour $x \in I$ on écrit $|f(x_0) - f(x)| \leqslant k|x_0 - x|$ et on fait $x \to x_0$, alors on déduit $f(x) \to f(x_0)$.
2. (a) Si on a $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$ alors $|f(\ell) - f(\ell')| \leqslant k|\ell - \ell'|$ absurde si $\ell \neq \ell'$ et $k < 1$.
   (b) Récurrence. Si $|u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$ alors $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell| \leqslant k \times k^n|u_0 - \ell|$ et ceci donne $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k^{n+1}|u_0 - \ell|$.
   Puis $n \to +\infty$, $k^n \to 0$, et donc $u_n \to \ell$.