TD 22
Variables aléatoires

Exercice 5. L'espérance est ici $n+1$ (loi uniforme). Le maximum entre X et son espérance est donc une variable Y qui vaut $n+1$ si $X \leqslant n+1$ et X sinon. Ainsi : $\mathbb{P}(Y=n+1) = \mathbb{P}(X \leqslant n+1) = \frac{n+1}{2n+1}$, et si $k > n+1$, $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2n+1}$.
On calcule alors l'espérance en écrivant $\sum_{k=1}^{2n+1} k\mathbb{P}(X=k)$ et en coupant cette somme en $n+1$, et on trouve $\frac{n+1}{2(2n+1)}(n^2+6n+2)$.
Pour la variance, de même en calculant d'abord $\sum_{k=1}^{2n+1} k^2\mathbb{P}(X=k)$ et en séparant de même.

Exercice 6. Il est plus facile d'exprimer le gain que la loi de X : si on introduit une variable aléatoire G_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ du gain au i-ème tirage, alors $\mathbb{P}(G_i = 1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ et $\mathbb{P}(G_i = -5) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$. Son espérance est $\mathbb{E}(G_i) = 1 \times \frac{2}{5} - 5 \times \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}$. Et ce sont des V.A.I.I.D. avec $X = \sum_{i=1}^{10} G_i$ donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}(G_i) = -26$.
Pour la loi on peut compter, de combien de façons différentes on peut obtenir chaque gain, de façon similaire à la loi binomiale.
On peut d'ailleurs s'y ramener précisément : par définition $\frac{G_i+5}{6}$ est une loi de Bernoulli (cela vaut 0 quand $X=5$ et 1 quand $X=1$) et donc en sommant $Y = \frac{X+50}{6}$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(10, 2/5)$. Ainsi la probabilité $\mathbb{P}(X=k)$ est la probabilité $\mathbb{P}(Y = \frac{k+50}{6})$.

Exercice 8.

1. Ce sont les lois binomiales, $A_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $B_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)$.
2. Par définition $X_n = A_n - B_n$.
3. Par définition $\mathbb{P}_{(X_n=\ell)}(X_{n+1}=k)$ est p si $k=\ell+1$ et $1-p$ si $k=\ell-1$, et 0 en dehors. $X_{n+1}-X_n$ correspond à un pas donc est 1 avec probabilité p et -1 avec probabilité $1-p$.
4. Si on note P_n la variable aléatoire $X_{n+1}-X_n$ alors la position $X_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k$. Mais les P_k sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même espérance $\mathbb{E}(P_k) = 1 \times p - 1 \times (1-p) = 2p-1$, et donc $\mathbb{E}(X_n) = n \times (2p-1)$: après n pas, il est en moyenne à $n(2p-1)$ mètres du bar.
   Si $2p-1<0$ $(p<\frac{1}{2})$, il va donc s'éloigner. Si $2p-1=0$ $(p=\frac{1}{2})$ alors en moyenne il reste au même endroit. Si $2p-1>0$ $(p>\frac{1}{2})$ il avance, dans ce cas il atteint sa chambre au bout d'un nombre de pas en moyenne $n = \frac{N}{2p-1}$, qui est minimal si $p=1$.

Exercice 9. Probabilités totales : $\mathbb{P}(P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{P_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{P_n}}(P_{n+1})$.
Soit $p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$. C'est une suite arithmético-géométrique $p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$, on trouve alors $p_n = (2p-1)^{n-1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.
Si $p=1$ alors p_n est constant égal à 1 : l'information se propage exactement.
Si $p=0$ alors p_n alterne entre 0 et 1 : c'est à chaque étape exactement le contraire qui est transmis, donc une personne sur deux a la bonne information et une personne sur deux a l'information contraire.
Sinon, alors $|2p-1|<1$ et $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$: au bout d'un moment on ne peut plus dire du tout si on a la bonne information ou pas !

Exercice 10.

1. Le nombre d'erreurs dans le message suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$.
2. Il s'agit de la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant 2)$ pour X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(3,p)$. C'est donc égal à $p^3 + 3(1-p)p^2$.
3. La fiabilité est augmentée si cette quantité est plus grande que p (on a une plus grande probabilité de pouvoir retrouver le message d'origine en triplant chaque bit, que sans). Cela donne l'équation $p^3+3(1-p)p^2 \geqslant p$ soit $2p^2-3p+1 \leqslant 0$ qui est vérifiée pour $p \in [\frac{1}{2}, 1]$. En fait, si $\frac{1}{2} < p < 1$ la fiabilité augmente strictement ; si $p=1$ la fiabilité reste la même (il n'y a pas d'erreurs), si $p=\frac{1}{2}$ cela ne change rien, et pour $p<\frac{1}{2}$ cela augmente en fait le taux d'erreurs.
4. Maintenant le nombre de bits retrouvés correctement se comporte comme une loi binomiale de paramètres n et la valeur $p^3+3(1-p)p^2$ déterminée précédemment. La probabilité de n'avoir aucune erreur est $\left(p^3+3(1-p)p^2\right)^n$.