TD 23 correction
Dérivation

Exercice 4. Dans cet exercice, on a besoin constamment de : $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite pour $x \to 0$; mais comme $\left|\sin(\frac{1}{x})\right| \leqslant 1$ alors $x^n \sin(\frac{1}{x}) \to 0$ pour tout exposant $n \geqslant 1$.

1. Pour $f : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ on vérifie successivement :
   — f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   — $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ donc f est continue en 0,
   — f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x})$,
   — $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$,
   — f' est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   — $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc f' est continue en 0,
   — $\frac{f'(x)}{x} = 3x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$, mais ceci n'a pas de limite pour $x \to 0$ (par l'absurde : si cela avait une limite ℓ alors $\cos(\frac{1}{x}) = 3x\sin(\frac{1}{x}) - \frac{f'(x)}{x}$ aurait pour limite $-\ell$, mais on sait qu'il n'y a pas de limite). Donc f' n'est pas dérivable en 0.

   En conclusion la fonction est $\mathcal{C}^1$, mais f' n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Similairement pour $g : x \mapsto x^4 \sin(\frac{1}{x})$, on vérifie successivement :
   — g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   — $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ donc g est continue en 0,
   — g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $g'(x) = 4x^3 \sin(\frac{1}{x}) - x^2\cos(\frac{1}{x})$,
   — $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$ donc g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$,
   — g' est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   — $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0 = g'(0)$ donc g' est continue en 0,
   — g' est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $g''(x) = 12x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 4x\cos(\frac{1}{x}) - 2x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x})$,
   — $\lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{x} = 0$ donc g' est dérivable en 0 et $g''(0) = 0$,
   — $g''(x)$ n'a pas de limite pour $x \to 0$ (c'est une somme dont tous les termes tendent vers 0 sauf $\sin(\frac{1}{x})$ qui n'a pas de limite ; si la somme avait une limite alors ce terme devrait aussi en avoir une).

   En conclusion la fonction g est $\mathcal{C}^1$ et g' est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais g'' n'est pas continue, donc g n'est pas $\mathcal{C}^2$.

Exercice 7.
1. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ alors $f' : x \mapsto -(1+x)^{-2}$, $f'' : x \mapsto +2(1+x)^{-3}$, $f^{(3)} : x \mapsto -6(1+x)^{(-4)}$ etc. On démontre aisément par récurrence $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$ (le signe alterne, l'exposant diminue de 1, les factoriels apparaissent).
2. Pour $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ la dérivée n-ième est alors simplement $x \mapsto n!(1-x)^{-n-1}$. On en déduit alors pour f

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) \tag{1}$$

donc

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right) \tag{2}$$

$$= \frac{n!}{2} \times \frac{(1+x)^{n+1} + (-1)^n(1-x)^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}} \tag{3}$$

Le degré du numérateur est n (les termes x^{n+1} s'annulent, pas les termes x^n).