TD 23
Dérivation

I Applications

Exercice 1. Calculer les limites suivantes en utilisant un développement limité à l'ordre 1.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{4x-\pi} \qquad \lim_{x\to-1} \frac{\ln(2x+3)}{e^{x+1}+x} \tag{2}$$

Exercice 2. Soit P une fonction polynôme réelle de degré n admettant n racines simples. Montrer que P' admet $n-1$ racines simples.

II Applications des accroissements finis

Exercice 3. Soit une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe des réels m, M tels que $\forall x\in]a,b[,\ m\leqslant f'(x)\leqslant M$. Montrer que $(b-a)m\leqslant f(b)-f(a)\leqslant(b-a)M$.

Exercice 4. Démontrer les inégalités suivantes en utilisant le théorème des accroissements finis.

$$\forall x\geqslant 0,\quad \frac{x}{1+x^2}\leqslant\arctan(x)\leqslant x \tag{3}$$

$$\forall x>0,\quad 1-\frac{1}{x}\leqslant\ln(x)\leqslant x-1 \tag{4}$$

$$\forall\alpha\geqslant 1,\ \forall x>-1,\quad (1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x \tag{5}$$

III Problèmes de prolongement

Exercice 5. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\frac{\sin(x)}{x}\end{aligned} \tag{6}$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f ce prolongement.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
3. On veut montrer que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Soit $x\neq 0$. Montrer qu'il existe un $c_x\in]0,x[$ (si $x>0$; sinon prendre $c_x\in]x,0[$) tel que $\frac{\sin(x)-x}{x}=-1+\cos(c_x)$. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.
   (b) De même, pour tout $x\neq 0$, montrer qu'il exsite $d_x\in]0,x[$ (si $x>0$; sinon prendre $d_x\in]x,0[$) tel que $\frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x}=-d_x\sin(d_x)$. En déduire $\lim_{x\to 0}f'(x)=0$.
   (c) Conclure.

Exercice 6. *Un lemme bien utile*
Soit une fonction $f:I\to\mathbb{R}$, où I est un intervalle. Soit $c\in I$. On suppose que f est continue sur I et $\mathcal{C}^1$ sur $I\setminus\{c\}$. On suppose de plus que la limite $\lim_{x\to c}f'(x)$ existe, on note ℓ cette limite. Montrer qu'alors f est dérivable en c avec $f'(c)=\ell$, puis que f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 7. Montrer qu'il existe un polynôme de degré 2, P, tel que la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\begin{cases}\arctan(x) & \text{si } x\leqslant 1\\ P(x) & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}\end{aligned} \tag{7}$$

soit $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit la fonction $f:x\mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, qu'on appelle g.
2. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{|x|}} \tag{8}$$
4. En déduire que la fonction prolongée g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. Soient deux nombres réels $\alpha<\beta$. Montrer qu'il existe une fonction ψ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que
   — $\psi(x)=0$ si $x<\alpha$ ou si $x>\beta$,
   — $\psi(x)\neq 0$ si $\alpha<x<\beta$.
6. Montrer qu'il existe une fonction φ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que
   — $\varphi(x)=0$ si $x<\alpha$,
   — $\varphi(x)=1$ si $x>\beta$.