TD 24 correction
Intégration

Exercice 1. *A*. On écrit (ce sont les indices de somme qui nous suggèrent une somme de Riemann en n rectangles)

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{2+\frac{k}{n}} \tag{1}$$

et on reconnait une somme de Riemann pour $x \mapsto \sqrt{2+x}$ sur $[0,1]$, en n rectangles à gauche. Calcul, en écrivant $(2+x)^{\frac{1}{2}}$ pour la primitive :

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \int_0^1 (2+x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \tag{2}$$

B. On passe au logarithme :

$$\begin{aligned}
\ln(D_n) &= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) && (3)\\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) && (4)\\
&= \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) && (5)
\end{aligned}$$

mais devant $\ln(\frac{1}{n}) = -\ln(n)$, il reste donc une somme de Riemann (n rectangles à droite) pour $x \mapsto \ln(1+x)$ continue sur $[0,1]$. Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(D_n) = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

Intégration par parties avec $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(1+x)$, on trouve $2\ln(2) - 1$. Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = \exp(2\ln(2)-1) = \frac{4}{e} \tag{7}$$

Exercice 2. On écrit

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = n^{p+1} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p}_{\underset{n\to+\infty}{\to}\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x} \tag{8}$$

À droite apparait une somme de Riemann pour $x \mapsto x^p$ sur $[0,1]$, l'intégrale vaut $\frac{1}{p+1}$. Conclusion : $S_p(n) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Exercice 7.

1. On pose $x = \frac{\pi}{2} - t$ dans J_n. Alors $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, et les bornes sont de $\frac{\pi}{2}$ à 0 (dans cet ordre !) d'où $J_n = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n(\frac{\pi}{2} - t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)\,\mathrm{d}t$. C'est classique pour un changement de variables décroissant : les bornes sont dans le mauvais sens mais la différentielle fait apparaitre un signe moins…
   Ensuite $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$. On déduit donc $J_n = I_n$.
2. $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t) \leqslant 1$ (sur $[0,1]$ les fonctions $x \mapsto x^n$ sont de plus en plus « écrasées » avec n). Intégrer l'inégalité donne directement $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on peut aussi travailler toujours avec sin, puisque $I_n = J_n$).
3. On écrit $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$ et on intègre par parties I_{n+2} :

$$u(t) = \cos^{n+1}(t) \qquad u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \tag{9}$$
$$v'(t) = \cos(t) \qquad v(t) = \sin(t) \tag{10}$$

   donc $I_{n+2} = \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Le crochet s'annule car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(0) = 0$ et il reste

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

   Mais $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$. Donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

   Cela donne $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ soit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.
4. Ainsi si n est pair : $I_n = I_0 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \frac{n-1}{n}$. On calcule facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Écrivons $n = 2p$. Dans ce produit on a au dénominateur

$$2 \times 4 \times \cdots \times 2p = 2^p \times 1 \times 2 \times \cdots \times p$$

   c'est à dire $2^p p!$. Au numérateur c'est

$$1 \times 3 \times \cdots \times 2p - 1 = \frac{(2p)!}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} \tag{13}$$

   et donc $I_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^p p!} \times \frac{1}{2^p p!}$ d'où $I_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$.
   Si n est impair alors $I_n = I_1 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times n - 1n$. On calcule facilement $I_1 = \int_0^{\pi} 2\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et alors, avec $n = 2p+1$, le numérateur est

$$2 \times 4 \times \cdots \times 2p = 2^p p! \tag{14}$$

et le dénominateur est

$$3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1) = \frac{(2p+1)!}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!} \tag{15}$$

d'où $I_n = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.