TD 24
Intégration

I Autour des sommes de Riemann

Exercice 1. Calculer les limites des suites suivantes pour $n \to +\infty$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad B_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \tag{1}$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k} \qquad D_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} (n+k)} \tag{2}$$

$$E_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{2n+k} \qquad F_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\, n^n}} \tag{3}$$

Exercice 2. Soit un entier $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Montrer que

$$S_p(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1} \tag{4}$$

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. On pose $R_\alpha(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$k \leqslant x \leqslant k+1 \Longrightarrow \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \tag{5}$$

2. En déduire l'encadrement

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant R_\alpha(n) \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \tag{6}$$

3. Pour $\alpha \neq 1$, en déduire que $(R_\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Pour $\alpha = 1$, en déduire $R_1(n) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.

II Révisions

Exercice 4. Calculer avec les changements de variable donnés.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{1+\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \quad (x = \cos(\theta)) \qquad I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \quad (u = \sqrt{1+x^2}) \tag{7}$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (x = \sin(\theta)) \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \quad (???) \tag{8}$$

$$I_5 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta)} \quad (t = \tan(\theta/2)) \qquad I_6 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos(\theta)} \quad (t = \tan(\theta/2)) \tag{9}$$

III Approfondissement

Exercice 5. Soit

$$F : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \tag{10}$$

1. Donner l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
3. Donner le tableau de variations de F.

Exercice 6. Soit

$$\begin{aligned} F : \,]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{11}$$

Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ et étudier les variations de F.

Exercice 7. *Intégrales de Wallis*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide du changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$, donner une relation entre I_n et J_n.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
4. En déduire une formule pour I_n exprimée avec des factorielles (on pourra distinguer selon la parité de n).

Exercice 8. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \int_a^b f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$.
3. Montrer de même que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0$.