TD 25 correction
Applications linéaires

Exercice 5. Petit exercice de rédaction.

1. On suppose f injective et $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ libre, il faut montrer que $(f(\overrightarrow{u_1}),\dots,f(\overrightarrow{u_p}))$ est libre.
   Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$, supposons $\lambda_1 f(\overrightarrow{u_1})+\dots+\lambda_p f(\overrightarrow{u_p})=\overrightarrow{0_F}$. Alors par linéarité $f(\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_p\overrightarrow{u_p})=\overrightarrow{0}_F$. Cela signifie $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_p\overrightarrow{u_p}\in\mathrm{Ker}(f)$. Mais f est injective. Donc $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_p\overrightarrow{u_p}=\overrightarrow{0_E}$. Mais la famille $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ est libre donc $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)=(0,\dots,0)$. Ceci démontre que la famille des $(f(\overrightarrow{u_1}),\dots,f(\overrightarrow{u_p}))$ est libre.
2. On suppose f surjective et $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ génératrice de E, il faut montrer que $(f(\overrightarrow{u_1}),\dots,f(\overrightarrow{u_p}))$ est génératrice de F. Soit $\overrightarrow{v}\in F$. Comme f est surjective, il existe $\overrightarrow{u}\in E$ tel que $f(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}$. Puis comme la famille $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p})$ est génératrice de E il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $\overrightarrow{u}=\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\dots+\lambda_p\overrightarrow{u_p}$. Puis par linéarité $\overrightarrow{v}=f(\overrightarrow{u})=\lambda_1 f(\overrightarrow{u_1})+\dots+\lambda_p f(\overrightarrow{u_p})$.
3. Combinaison des deux précédents.

Exercice 7.

1. $f\circ f=0$ signifie en fait exactement $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$: si $\overrightarrow{v}\in\mathrm{Im}(f)$ alors il existe $\overrightarrow{u}\in E$ tel que $\overrightarrow{v}=f(\overrightarrow{u})$, et alors $f(\overrightarrow{v})=f(f(\overrightarrow{u}))=\overrightarrow{0_E}$.
2. Théorème du rang avec, comme conséquence de la question précédente, $\dim(\mathrm{Im}(f))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}(f))$, on a alors tout de suite $2\dim(\mathrm{Ker}(f))\geqslant\dim(E)$.

Interprétation : $f\circ f=0$ signifie qu'appliquer f deux fois de suite à tout vecteur $\overrightarrow{u}\in E$ donne toujours $\overrightarrow{0_E}$; l'exercice montre qu'alors *au moins la moitié* (au sens de la dimension) des vecteurs de E sont envoyés sur $\overrightarrow{0_E}$ en appliquant une seule fois f !

Exercice 8.

1. Si $\alpha_0\neq\alpha_1$ on vérifie sans peine que le système de matrice $\begin{pmatrix}1&\alpha_0\\1&\alpha_1\end{pmatrix}$ est bien de rang 2.
2. Calcul.
3. Soient deux polynômes $P,Q\in E$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q)&=\Big((\lambda P+Q)(\alpha_0),\dots,(\lambda P+Q)(\alpha_n)\Big)\\&=\Big(\lambda P(\alpha_0)+Q(\alpha_0),\dots,\lambda P(\alpha_n)+Q(\alpha_n)\Big)\\&=\lambda\Big(P(\alpha_0),\dots,P(\alpha_n)\Big)+\Big(Q(\alpha_0),\dots,Q(\alpha_n)\Big)\\&=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$
   Ceci démontre la linéarité de φ.
4. Soit un polynôme $P\in E$ tel que $\varphi(P)=(0,\dots,0)$. Cela signifie que P a pour racines tous les $\alpha_0,\dots,\alpha_n$. Donc, comme P est de degré au plus n, que P est nul ! Ceci montre $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$ donc φ est injective.
5. L'application φ est injective, entre E identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$. Elle est donc automatiquement bijective ! Cela signifie précisément ce qui est donné dans l'énoncé : pour tout $(\beta_0,\dots,\beta_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ il existe un unique polynôme $P\in E$ tel que $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $P(\alpha_i)=\beta_i$.