TD 27 correction
Intégration

Exercice 7. 1. On pose $x = \frac{\pi}{2} - t$ dans J_n. Alors $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, et les bornes sont de $\frac{\pi}{2}$ à 0 (dans cet ordre !) d'où

$$J_n = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{d}t \tag{1}$$

C'est classique pour un changement de variables décroissant : les bornes sont dans le mauvais sens mais la différentielle fait apparaitre un signe moins et on peut le remettre dans l'ordre…

Ensuite $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$. On déduit donc $J_n = I_n$.

2. $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t) \leqslant 1$ (sur $[0,1]$ les fonctions $x \mapsto x^n$ sont de plus en plus « écrasées » avec n). Intégrer l'inégalité donne directement $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on peut aussi travailler toujours avec sin, puisque $I_n = J_n$).

3. On écrit $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$ et on intègre par parties I_{n+2} :

$$u(t) = \cos^{n+1}(t) \qquad u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) \tag{2}$$
$$v'(t) = \cos(t) \qquad v(t) = \sin(t) \tag{3}$$

donc

$$I_{n+2} = \Big[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Le crochet s'annule car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(0) = 0$ et il reste

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

Mais $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$. Donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

Cela donne $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ soit $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

4. Ainsi si n est pair : $I_n = I_0 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \frac{n-1}{n}$. On calcule facilement $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Écrivons $n = 2p$. Dans ce produit on a au dénominateur

$$2 \times 4 \times \cdots \times 2p = 2^p \times 1 \times 2 \times \cdots \times p \tag{7}$$

c'est à dire $2^p p!$. Au numérateur c'est

$$1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1) = \frac{(2p)!}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} \tag{8}$$

et donc $I_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^p p!} \times \frac{1}{2^p p!}$ d'où $I_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$.

Si n est impair alors $I_n = I_1 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}$. On calcule facilement $I_1 = \int_0^{\pi} 2\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1$ et alors, avec $n = 2p+1$, le numérateur est

$$2 \times 4 \times \cdots \times 2p = 2^p p! \tag{9}$$

et le dénominateur est

$$3 \times 5 \times \cdots \times (2p+1) = \frac{(2p+1)!}{2 \times 4 \times \cdots \times 2p} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!} \tag{10}$$

d'où $I_n = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice 8. 1. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue sur $[a,b]$ donc par le théorème des bornes, f' est bornée. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leqslant M$. Alors comme on a aussi $|\cos(nt)| \leqslant 1$, par produit $|f'(t)\cos(nt)| \leqslant M$. D'où par inégalité triangulaire

$$\left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a) \tag{11}$$

ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. De même pour $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en utilisant $|\sin(nt)| \leqslant 1$.

2. La fonction f étant $\mathcal{C}^1$, il est possible d'intégrer par parties en dérivant f. On pose $(n \geqslant 1)$

$$u(t) = f(t) \qquad u'(t) = f'(t) \tag{12}$$
$$v'(t) = \cos(nt) \qquad v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt) \tag{13}$$

donc

$$I_n = \Big[\tfrac{1}{n}\sin(nt)f(t)\Big]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b \sin(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{14}$$

C'est à dire

$$I_n = \frac{1}{n}\Big(\sin(nb)f(b) - \sin(na)f(a) - J_n\Big) \tag{15}$$

Mais tout ceci tend vers 0 pour $n \to +\infty$, car le morceau J_n est borné ainsi que les sin et cos, et on divise par n (on a une inégalité de la forme $|I_n| \leqslant \frac{A}{n}$, où la constante A majore tout ce terme de droite).

3. Idem, une intégration par parties fait apparaitre $\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ qui est aussi borné.

Exercice 9. 1. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors ou bien $x > 0$, dans ce cas $2x > x > 0$ et sur l'intervalle $[x, 2x]$, $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est bien continue. Ou bien $x < 0$, alors $2x < x < 0$ et c'est sur l'intervalle $[2x, x]$ que $t \mapsto \frac{cos(t)}{t}$ est continue.
Les bornes de l'intégrale sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ et f est continue. Si on note G une primitive de f (soit sur $]-\infty, 0[$ soit sur $]0, +\infty[$) alors G est $\mathcal{C}^1$ et $F(x) = G(2x) - G(x)$. Donc F est $\mathcal{C}^1$.

2. $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et dans l'intégrale on pose le changement de variable $u = -t$, en étant très soigneux, on trouve

$$F(-x) = -\int_u^{2u} \frac{\cos(-u)}{-u}\,\mathrm{d}u \tag{16}$$

qui donne, en enlevant le signe moins devant (qui provient de $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$) et avec $\cos(-u) = \cos(u)$, $F(-x) = F(x)$. Donc F est paire.

3. Encore une fois on travaille soit sur $]-\infty, 0[$ soit sur $]0, +\infty[$, on trouve

$$F'(x) = 2 \times \frac{\cos(2x)}{2x} - 1 \times \frac{\cos(x)}{x} = \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x} \tag{17}$$

Pour étudier le signe, on peut par exemple factoriser avec l'angle moitié (formule $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$) qui donne ici $\cos(2x) - \cos(x) = -2\sin(\frac{3x}{2})\sin(\frac{x}{2})$.

4. Intégration par parties où le but est de dériver $\frac{1}{t}$ pour faire apparaitre $\frac{1}{t^2}$:

$$u(t) = \frac{1}{t} \qquad u'(t) = -\frac{1}{t^2} \tag{18}$$

$$v'(t) = \cos(t) \qquad v(t) = \sin(t) \tag{19}$$

d'où

$$F(x) = \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} -\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{20}$$

soit

$$F(x) = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

Les deux premiers morceaux tendent vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, car le sinus reste borné. Pour le dernier il faut utiliser un encadrement : d'abord on raisonne avec $x > 0$, $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et donc, en $+\infty$,

$$\left|\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

Mais cette dernière se calcule et donne

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x} \tag{23}$$

qui tend vers 0 pour $x \to +\infty$.
Même raisonnement en $-\infty$ avec $x < 0$ (ou : parité de F), attention alors à bien écrire la croissance de l'intégrale.

5. On sait $\cos(t) =_{t\to 0} 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ et donc $\frac{\cos(t)}{t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o(t)$. Cela a-t-il du sens d'intégrer cette égalité ? Posons

$$g(t) = \frac{\cos(t)}{t} - \frac{1}{t} + \frac{t}{2} \tag{24}$$

et fixons d'abord $x > 0$, on peut parfaitement l'intégrer entre x et $2x$ (c'est une fonction continue sur $]0, +\infty[$), qui donne :

$$\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

soit après calcul

$$\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - \ln(2) + \frac{3}{4}x^2 \tag{26}$$

Mais d'autre part, voir le théorème du cours « intégrer un DL » on démontre en fait que si $g(t) \underset{t\to 0}{=} o(t)$ alors $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$, et ici

$$\int_x^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = o(x^2) \tag{27}$$

(la différence de deux termes $o(x^2)$ est encore $o(x^2)$.
En conclusion cela prolonge F par continuité tout en donnant un développement limité en 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \tag{28}$$

La valeur en 0 est $F(0) = \ln(2)$, et on peut en fait continuer le DL à n'importe quel ordre à partir de celui de $\frac{\cos(t)}{t}$ en 0.

Pour $x < 0$, encore une fois on peut reprendre les mêmes arguments ou bien utiliser la parité.

6. Par ces mêmes calculs, le prolongement continu est dérivable en 0 avec $F'(0) = 0$ (le coefficient de x dans le DL, qui est nul). Mais d'autre part on calcule aisément $\lim_{x\to 0} F'(x)$, en utilisant la formule déterminée aux questions précédents pour F' sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, car c'est
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x} \tag{29}$$
avec un DL de cos, et on trouve bien 0. Donc le prolongement est $\mathcal{C}^1$.