TP informatique

BCPST1B 2024–2025

L.-C. LEFÈVRE
Lycée Hoche, Versailles

À propos

Le présent document a été rédigé entièrement avec le langage **Typst**. Il s'agit d'un tout récent langage de mise en forme de documents ayant pour ambition de remplacer LaTeX, entremêlant une syntaxe à balisage de type Markdown avec un langage de script de style fonctionnel pur, et fournissant déjà de nombreux outils utiles pour la publication scientifique (mathématiques, bibliographie, coloration syntaxique du code…) et des technologies des plus modernes (unicode, SVG, importation CSV, tout supporté nativement), open-source et écrit en langage **Rust**. Il a, dès sa publication, fédéré de nombreux contributeurs et amateurs lassé de LaTeX qui ne cessent d'en explorer toutes les possibilités.

Le but de publier ce document est donc aussi d'expérimenter ce nouveau langage et d'en démontrer les possibilités.

Ainsi les TP sont rédigés dans des fichiers relativement épurés et dépendant d'un fichier modèle. Ce présent document inclut les fichiers de TP uns par uns et les réunit en un seul PDF, et compile d'un seul coup. La police de caractères s'appelle **New Computer Modern**. Le thème de coloration syntaxique s'appelle **Pastie**. Certaines images sont fabriquées avec le logiciel **Inkscape**, les graphiques mathématiques avec **Sage**, tout exporté en SVG. Tout est rédigé avec l'éditeur de texte **GNU Emacs**, pour lequel il existe déjà un mode Typst, avec un clavier en configuration **BÉPO**.

Le document actuel comporte **20 TP** et **212 exercices**. Il mis à jour au fur et à mesure de l'année.

Table des matières

Introduction

Le langage Python est un langage de programmation qui permet de donner des instructions à l'ordinateur, écrites de façon lisible par un humain. Par rapport aux nombreux langages de programmation existants, il a les avantages suivants :

- **Moderne** : utilisé de plus en plus dans de nombreux milieux scientifiques, c'est même le langage phare dans le domaine de l'intelligence artificielle, et il est encore en pleine expansion en terme de nombre d'utilisateurs et d'offres d'emplois. Pour une fois l'Éducation Nationale est vraiment à la pointe…
- **Libre** : n'importe qui peut l'installer sur son ordinateur, le tester, lire la documentation, le modifier et l'améliorer, et contribuer au développement. Le langage Python n'appartient pas à une entreprise mais à la communauté Python, qui est particulièrement grande et active.
- **Facile à lire** : l'accent est mis sur la lisibilité et la facilité à programmer. Cela en fait un bon choix pour l'enseignement et pour l'apprentissage d'un premier langage.
- **Dynamique** : en plus du mode script qui exécute tout un programme d'un seul coup, il y a un mode interactif qui exécute les commandes unes par unes et permet de faire des tests très simplement, inspecter le contenu des variables, naviguer dans l'aide, exécuter son programme pas à pas pour trouver des erreurs.
- **Haut niveau** : le langage fournit de très nombreuses fonctions et constructions qui sont « éloignées » du fonctionnement interne de l'ordinateur mais beaucoup plus faciles à manipuler pour un humain. En comparaison d'autres langages, un programme Python est souvent *plus court* et *plus rapide à écrire*, ce qui le rend si apprécié. En contrepartie, un programme Python est aussi *plus lent à fonctionner* : ce n'est pas le langage absolument idéal pour toutes les situations.
- **Extensible** : de très nombreuses librairies sont disponibles, c'est-à-dire des extensions et des fonctions supplémentaires, qui permettent d'interagir avec les fichiers de l'ordinateur, le réseau, tracer des graphiques, traiter des statistiques, des images… et tout est expliqué dans la documentation.

En conséquence, pour un élève, c'est aussi nettement plus difficile qu'un langage de calculatrices ou qu'un langage comme *Scratch* (au collège avec le chat) car ceux-ci ont été conçus spécifiquement pour l'enseignement mais n'ont aucune utilité professionnelle !

Enfin les logiciels viennent avec leur propre documentation, écrite par ceux qui ont créé le logiciel, et qui décrit très précisément leur fonctionnement. *Tout* ne peut donc pas venir de l'enseignant : celui-ci connait avant tout les concepts généraux de la programmation et a appris le langage Python, mais n'est pas responsable du logiciel lui-même… Il passe notamment du temps à lire les documentations, en anglais bien entendu ! Alors surtout pour progresser **expérimentez**, **testez avec vos propres valeurs**, **apprenez à lire les messages d'erreur**, **lisez les documentations**.

TP 1
Prise en main

I Introduction au mode interactif

Dans le mode interactif, on écrit les commandes **une ligne à la fois** à la suite de **l'invite de commande** `>>>`. À chaque ligne, Python affiche le résultat du calcul, et enregistre au fur et à mesure les variables.

Il est donc possible de recopier et tester ligne par ligne les morceaux de programmes présentés. Pour progresser, **ne pas hésiter à prendre des initiatives**, **tester avec d'autres valeurs** que celles proposées ici et **lire les messages d'erreur** !

Les espaces sont optionnels, mais rendent le code plus lisible. Par contre la différence entre minuscules et majuscules est importante.

Un raccourci clavier utile : les flèches haut ↑ et bas ↓ permettent de faire réapparaître les entrées précédentes, pour éviter d'avoir à tout recopier à chaque fois, surtout en cas d'erreur.

I.1 Utilisation comme calculatrice

Dans un premier temps, on peut utiliser Python comme une simple calculatrice avec les nombres et les opérations `+`, `-`, `*`, `/`. Le programme répond par le résultat du calcul.

```
>>> 3 + 4
7
>>> 8 - 10
-2
>>> 10 / 3
3.3333333333333335
```

Ces opérations vérifient les règles de priorité habituelles. Des parenthèses peuvent être nécessaires pour forcer la priorité.

```
>>> 2 + 3 * 5
17
>>> (2 + 3) * 5
25
```

L'opération puissance s'écrit `**` : ainsi 10^3 est

```
>>> 10 ** 3
1000
```

Exercice 1.1
Calculer les nombres suivants :

$$2^{16} \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \qquad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}$$

I.2 Les variables

En informatique, une variable est une case de la mémoire capable d'enregistrer une valeur ou le résultat d'un calcul. Pour la manipuler il faut lui donner un nom (qui peut être composé de plusieurs lettres). L'opération d'**affectation**, écrite avec le symbole `=`, permet de donner un contenu à la variable.

```
>>> x = 3
>>> x
3
>>> x + 4
7
>>> y = 8
>>> x - y
-5
```

En mathématiques on note parfois ceci $x \leftarrow 3$ pour bien signifier qu'il s'agit de **l'opération** de mettre dans la variable x la valeur 3.

À partir de ceci on peut vouloir mettre à jour la valeur de `x` :

```
>>> x = 3
>>> x
3
>>> x = x + 1
>>> x
4
```

Là encore, la ligne `x = x + 1` ne se comprend pas vraiment comme une égalité mathématique mais plutôt comme l'opération $x \leftarrow x + 1$: remplacer la valeur de x par sa valeur augmentée de 1.

On remarque que rien ne s'affiche immédiatement après l'opération d'affectation. C'est normal, il s'agit d'une instruction, qui dit à l'ordinateur de réaliser une certaine opération en mémoire mais ne produit pas de résultat visible.

Les types de la section suivante peuvent tous être contenus dans une variable.

En mode interactif, le programme enregistre les variables au fur et à mesure et s'en souvient, jusqu'à ce qu'on lui demande de redémarrer.

II Les types

Les expressions et les variables Python ont toutes un **type**, qui indique quel type d'objet on manipule et comment l'ordinateur se les représente. Le type d'une expression peut-être obtenu avec la fonction `type()` :

```
>>> x = 3
>>> type(x)
<class 'int'>
>>> type(3.5)
<class 'float'>
```

Il est important de connaitre le fonctionnement d'un certain nombre de types de base. Les principaux types que nous manipulerons sont les suivants :

II.1 Le type entier `int`

C'est le type des nombres entiers comme `5` ou bien `-2`, en anglais *integer*, en Python `int`.

Un fait remarquable est que Python est capable de gérer des nombres entiers très grands !

```
>>> 2 ** 10
1024
>>> 2 ** 100
1267650600228229401496703205376
>>> 2 ** 1000 # à vous d'essayer !
```

Ce n'est pas si évident : nous verrons qu'un nombre est codé dans l'ordinateur par une suite de 0 et de 1 appelés *bits*, avec un nombre fixe de chiffres (en général 32 ou bien 64) ce qui donne un nombre maximal qu'on peut représenter. Ici, la place en mémoire pour stocker les entiers Python est agrandie automatiquement selon les besoins.

II.2 Le type flottant `float`

En informatique, on ne peut pas représenter tous les nombres réels avec une infinité de décimales après la virgule, car l'espace nécessaire pour stocker un tel nombre pourrait être infini…

Les nombres à virgule que l'on manipule sont appelés des **nombres à virgules flottantes** (ou plus simplement **flottants**) et forment le type `float`. Le symbole pour la virgule est le point `.` et on peut aussi utiliser la notation scientifique où la lettre `e` désigne la puissance de 10 :

```
>>> 1.23e4
12300.0
>>> 12.34e50
1.234e+51
>>> 1 - 1e-5
0.99999
```

Le nom de *virgule flottante* provient du fait que ces nombres sont représentés par l'ordinateur sous une certaine forme de notation scientifique, dans un emplacement mémoire de taille limitée avec une partie pour stocker l'exposant et une partie pour stocker les décimales. Ainsi la précision d'un nombre est toujours limitée à une quinzaine de chiffres, mais la partie avec exposant peut varier d'environ `e-308` à `e+308`. C'est la plupart du temps bien suffisant pour les sciences !

Mais à cause de cette précision limitée, il y a parfois des erreurs d'arrondis dans les nombres flottants…

Exercice 1.2

1. Tester et comparer

```
>>> 0.3
>>> 0.1 + 0.2
>>> 0.1 + 0.2 == 0.3
```

2. Tester

```
>>> 1e30 + 0.1
>>> 1e30 + 0.1 == 1e30
```

L'opération de division `/` donne toujours un nombre flottant, même entre nombres entiers :

```
>>> 10 / 5
2.0
>>> type(10 / 5)
<class 'float'>
```

Pour travailler uniquement avec des nombres entiers on utilise la division euclidienne `//`, celle qui donne un quotient et un reste :

```
>>> 10 // 5
2
>>> 11 // 5
2
>>> 19 // 5
3
```

Le reste lui est obtenu par l'opération `%`. Cela parlera mieux aux élèves qui ont étudié l'arithmétique…

```
>>> 10 % 5
0
>>> 11 % 5
1
>>> 19 % 5
4
```

C'est la bonne méthode pour tester la parité : un entier n est pair quand `n % 2` vaut 0, et impair si `n % 2` vaut 1.

II.3 Le type des chaines de caractères `str`

Ce que l'on appelle communément du *texte* forme aussi un type, que l'on peut enregistrer dans des variables et que l'on peut vouloir manipuler. En informatique, un tel texte s'appelle une **chaine de caractères**, en anglais *string*. En effet l'ordinateur les considère comme une liste de caractères les uns à la suite des autres, indépendamment de savoir si le texte a du sens ou non. Elles forment le type `str` et sont écrites encadrées préférablement par le guillemet double `"texte"`, même si le guillemet simple (apostrophe `'`) est possible aussi.

```
>>> x = "Bonjour"
>>> type(x)
<class 'str'>
```

L'opération `+` sur les chaines de caractères crée une nouvelle chaine en plaçant les deux bout à bout et s'appelle en informatique la **concaténation**.

```
>>> "Bonjour" + "et bienvenue"
'Bonjouret bienvenue'
```

Corrigeons ceci… premier essai :

```
>>> "Bonjour" + " et bienvenue"
'Bonjour et bienvenue'
```

Deuxième essai :

```
>>> x = "Bonjour"
>>> y = "et bienvenue"
>>> x + " " + y
'Bonjour et bienvenue'
```

Il existe aussi une opération de multiplication entre une chaine et un entier. À votre avis, que fait-elle ?

Exercice 1.3
Tester :

```
>>> "Ha" * 5
```

La syntaxe crochets `[i]` permet d'accéder au i-ième caractère de la chaine :

```
>>> x = "Bonjour"
>>> x[1]
'o'
>>> x[2]
'n'
```

… en fait, elle est numérotée à partir de 0 : c'est `x[0]` qui donne `'B'`.

Avec les indices négatifs, on repart de la fin !

```
>>> x = "Bonjour"
>>> x[-1]
'r'
>>> x[-2]
'u'
```

Ces conventions sont peut-être étonnantes au début, mais cela reviendra de nombreuses fois…

Exercice 1.4
Tester et expliquer la différence entre les deux expressions suivantes :

```
>>> 12 + 34
>>> "12" + "34"
```

À retenir

Les variables Python ont toutes un **type**. Chaque type a ses propriétés. Les opérations ne se comportent pas toutes de la même façon en fonction du type des variables, même si en apparence leur contenu est le même.

II.4 Le type booléen

C'est un type à part entière qui représente une valeur vrai ou faux, en Python `True`, `False`. Le nom provient du mathématicien anglais George Boole. On appelle donc ces valeurs des **booléens**, formant le type `bool`.

```
>>> type(True)
<class 'bool'>
>>> type(False)
<class 'bool'>
```

On peut utiliser dessus les opérations
- et : `and`
- ou : `or`
- non : `not`

… et vérifier toutes les propriétés que nous avons vues en cours sur les assertions !

```
>>> True and True
True
>>> True and False
False
>>> True or False
True
>>> not True
False
>>> not False
True
```

et ainsi de suite. Si on en combine plusieurs, on peut utiliser des parenthèses.

Exercice 1.5
Donner le résultat de l'expression suivante :

```
>>> not True and False
```

Cela permet d'en déduire laquelle de ces deux opérations est prioritaire : le `not` ou bien le `and` ?

Les opérations de comparaisons entre nombres donnent une valeur booléenne. Ce sont les suivantes :
- L'égalité : `==`
- La différence : `!=`
- Les comparaisons strictes : `<`, `>`
- Les comparaisons larges $\leqslant$, $\geqslant$: `<=`, `>=`

Quelques exemples :

```
>>> 5 > 8
False
>>> 5 + 3 <= 8
True
>>> 1 == 2
False
>>> 1 != 2
True
```

Insistons encore une fois sur le fait que ce sont des types à part entière, pouvant rentrer dans des variables :

```
>>> résultat = 3 < 4
>>> not résultat
False
```

Les opérations logiques ne sont pas tout à fait *commutatives* comme en mathématiques…

Exercice 1.6
1. Tester et expliquer la différence entre les deux expressions :

   ```
   >>> 1 + 2 == 5 and 1 / 0 == 2
   >>> 1 / 0 == 2 and 1 + 2 == 5
   ```

2. Pouvez-vous mettre en place un test similaire pour illustrer le comportement du `or` ?

II.5 Les conversions de type

Comme on l'a vu, le nombre `3` n'est pas la même chose que `3.0` car le premier est de type `int` et le second est de type `float`. Et la chaine de caractères `"12"` n'est pas la même chose que le nombre entier `12`.

Aux types correspondent aussi des fonctions de conversion de type `int()`, `float()`, `str()`, `bool()`, qui convertissent **vers** le type :

```
>>> float(5)
5.0
>>> int(3.5)
3
>>> int("12") + int("34")
46
>>> str(12) + str(34)
'1234'
```

Via `bool()`, n'importe quel nombre est converti à `True`, sauf `0`. N'importe quelle chaine est convertie en `True`… sauf la chaine vide `""`. Il y a des bonnes raisons historiques pour cela : puisqu'un entier est codé sur au minimum 8 bits, il a été convenu que le `0` représentait `False` et toute autre valeur représentait `True`.

III Le mode script

En mode script, on peut écrire plusieurs lignes à la suite et l'envoyer d'un coup à l'interpréteur Python. Les instructions sont obligatoirement séparées par un retour à la ligne. Le programme continue à enregistrer les

variables au fur et à mesure, mais **il n'affiche rien si on ne le lui demande pas** ! Il faut alors utiliser la commande `print()` pour afficher quelque chose.

```
x = 3
y = 8
x = x - y
print(x)
```

On peut aussi se servir de `print` pour afficher plusieurs variables, ou nombres ou chaines, à la suite sur une même ligne.

```
x = 5
y = 12
print("x =", x, "y =", y)
```

Toute ligne commençant par le symbole # est ignorée : c'est un **commentaire**, qui sert à expliquer ce que fait le programme. Les commentaires sont loin d'être inutiles car ils permettent à d'autres personnes qui lisent le programme de mieux le comprendre.

Dans les logiciels Pyzo ou Spyder, une ligne commençant par *#%%* (dièse, pourcent, pourcent) permet de séparer le code en **cellules** pour garder tout le code sur une même page, mais ne demander à n'exécuter qu'une seule cellule à la fois (sinon, on rajoute du code au fur et à mesure, et à chaque fois, tout est exécuté depuis le début). Une bonne idée est de l'utiliser pour séparer chaque question des exercices. L'option s'appelle « exécuter la cellule » (*execute cell*), qu'on trouve aussi sur le raccourci clavier Ctrl + Entrée. Toute l'année, les fichiers seront présentés divisés en cellules.

Enfin la dernière notion utile pour entamer le mode script est la fonction `input()` qui permet de demander une information à l'utilisateur.

```
x = input("Entrez quelque chose : ")
print("Vous avez entré", x)
```

La valeur donnée par `input()` est toujours de type `str` ! Les conversions de type apparaissent donc bien utiles ici. Si on veut demander un nombre (entier) à l'utilisateur, on écrit en général directement `int(input())` :

```
x = int(input("Entrez un nombre entier : "))
print("Son double est :", 2 * x)
```

Si on veut un nombre qui peut avoir une virgule, alors c'est la conversion `float()` qu'il faut utiliser, sinon une erreur se produit : on tente de convertir en nombre entier du texte avec une virgule dedans !

IV D'autres exercices

Dans les exercices suivants, on demande d'écrire des petits bouts de programme : quelques lignes de code dans le mode interactif, séparées en cellules, de façon à pouvoir les exécuter séparément. À ce stade, pour que les programmes soient un minimum intéressants, ils utilisent largement `input()` pour que l'utilisateur puisse varier un paramètre.

Exercice 1.7
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur son nom, puis affiche `Bienvenue` *nom* `en BCPST1B !`

Pouvez-vous le faire en mettant ce texte dans une seule variable ?

Exercice 1.8
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur son année de naissance, puis affiche son âge en 2024 (on ne se préoccupera pas du mois de naissance…), sous la forme `Vous avez` *ans* `ans.`

Idem, pouvez-vous mettre ce texte dans une seule variable ?

Exercice 1.9
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer deux nombres `a` et `b` et en donne la moyenne.

Exercice 1.10
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer deux nombres `a` et `b`, les affiche, puis les échange, et les affiche encore. En échangeant réellement la valeur des variables, pas seulement l'affichage…

Exercice 1.11
On peut utiliser `print()` directement sur une expression booléenne pour afficher simplement `True` or `False`.

Écrire des programmes qui demandent à l'utilisateur des nombres et testent, en affichant le résultat, les conditions suivantes :

1. Le nombre `n` est pair (en utilisant la division `%`).
2. Les nombres entiers `n` et `m` sont de même signe.
3. Les nombres entiers `n`, `m`, `p` sont deux à deux distincts.

Exercice 1.12
Sur un caractère tout seul `x`, la fonction `x.isupper()` donne `True` si `x` est en majuscule et `False` sinon. Essayez-là !

Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer une phrase, et teste si la phrase commence par une majuscule et termine par un point.

TP 2
Conditions et boucles

Aujourd'hui nous écrivons des programmes avant tout dans le mode script (sur plusieurs lignes) ; le mode interactif sert à faire des tests courts ou à inspecter le contenu ou le type des variables. Séparer les programmes et les exercices par des **cellules** délimitées par une ligne commençant par la suite de trois caractères `#%%` permet de tout garder sur une même page (donc d'enregistrer dans un même fichier `.py`, mais de n'exécuter qu'un morceau à la fois et pas tout depuis le début. La présentation du fichier doit donc ressembler à ceci, comme dans les corrections :

```
#%% exercice 1
...

#%% exercice 2
...
```

On utilise alors l'option « exécuter la cellule » (*execute cell*), aussi sur le raccourci clavier `Ctrl` + `Entrée`.

I Conditions simples

Le mot-clé `if` suivi d'une condition introduit un morceau de programme qui va être exécuté **si** la condition est vérifiée. Éventuellement, le mot-clé `else` (**sinon**) introduit un morceau de programme qui va être exécuté dans le cas contraire.

Voici un exemple de bout de programme, qu'on peut recopier tel quel et tester :

```
x = int(input("Entrez un nombre : "))
if x >= 0:
    print("positif")
else:
    print("strictement négatif")
print("FIN")
```

Cela est bien entendu un concept fondamental de la programmation, qui permet de rendre un programme interactif et dont le résultat va dépendre des entrées.

La syntaxe générale en Python est la suivante :

```
if condition:
    instructions
else:
    instructions sinon
```

où :

1. `condition` désigne n'importe quelle expression booléenne que le programme va tester. Elle est formée notamment, on le rappelle, avec
   - L'égalité : `==`
   - La différence : `!=`
   - Les comparaisons strictes : `<`, `>`
   - Les comparaisons larges : `<=`, `>=`
   - Les mots-clés `and`, `or`, `not`
2. `instructions` est du code Python, qui peut être sur plusieurs lignes, qui va être exécuté seulement si la condition a été évaluée à `True`. La partie du programme qui va être exécutée est tout ensemble décalée vers la droite (on dit **indentée**). En général le décalage est de 4 espaces, ou un seul caractère tabulation ; le logiciel sert notamment à bien aligner les lignes. Elle forme un **bloc d'instructions**.
3. `instructions sinon` est un **autre bloc d'instructions** qui va être exécuté dans le cas contraire.

4. Ensuite, le code qui n'est plus décalé vers la droite ne fait plus partie des blocs d'instructions ; il est donc exécuté dans tous les cas. Le `else` n'est d'ailleurs pas du tout obligatoire : si la condition est fausse alors le premier bloc d'instruction n'est pas exécuté et le programme passe directement à la suite.

On n'oubliera pas non plus le symbole double points, qui fait partie de la syntaxe, termine la ligne et introduit le bloc d'instructions. Il permet aussi au logiciel de proposer directement d'indenter, le saut de ligne après le double point décale automatiquement à droite et on n'a rarement besoin d'écrire à la main les espaces ou tabulations.

Exercice 2.1
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur son âge, et affiche s'il est majeur ou mineur.

Exercice 2.2
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur un nombre, et affiche sa valeur absolue.

Exercice 2.3
Choisissez un mot de passe secret ; écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un mot, et qui lui dit si c'est le bon mot de passe ou non.

Le bloc d'instructions peut lui-même contenir d'autres conditions emboitées. L'indentation des blocs est alors cruciale.

Exercice 2.4
Améliorer le premier programme pour demander à l'utilisateur un nombre et afficher s'il est positif, négatif ou nul. Sans regarder la suite du TP.

II Conditions en cascade

Il arrive que l'on veuille tester une condition plus complexe qui ne se traduit pas aussi simplement que « si… alors ». Le mot-clé `elif` est la contraction de « else, if » (**sinon, si**) et introduit une condition qui va être testée si la précédente était fausse, ainsi qu'un bloc d'instruction correspondant à exécuter. Par exemple le programme du dernier exercice peut se ré-écrire ainsi :

```
x = int(input("Entrez un nombre : "))
if x > 0:
    print("positif")
elif x < 0:
    print("négatif")
else:
    print("nul")
```

Il est tout à fait possible d'enchainer plusieurs `elif` ; les conditions sont simplement testées les unes à la suite des autres. Le `else` final capture le cas où **aucune** des conditions n'a été vérifiée ; il n'est toujours pas obligatoire, si aucune condition n'est vérifiée le programme passe simplement à la suite. La syntaxe générale ressemble donc à :

```
if condition1:
    instructions1
elif condition2:
    instructions2
elif ... :
    ...
else:
    instructions sinon
```

Ainsi lors de l'exécution :
1. Le programme teste la `condition1`. Si elle est vraie alors il exécute `instructions1`.
2. Sinon, il vérifie la `condition2`. Si elle est vraie alors il exécute `instructions2`.

3. Et ainsi de suite.
4. À la fin, si aucune condition n'a été vérifiée, le programme exécute le bloc d'instructions du `else`.

Exercice 2.5
Écrire un programme qui demande son âge à l'utilisateur, et affiche s'il est majeur, mineur, ou senior (plus de 65 ans).

Exercice 2.6
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur sa note au bac (attention, ce n'est pas forcément un nombre entier) et affiche à quelle mention cela correspond. Vous pouvez l'assortir librement d'un commentaire sur la note…

À retenir

Les conditions en cascade sont testées **successivement** quand la précédente a échoué. À cause de cela, il y a un ordre logique et naturel dans lequel on doit écrire ses conditions. De plus le mot `else` n'est pas suivi par une condition (c'est un « sinon » tout court) et il s'exécute quand aucune des conditions précédentes n'a été vérifiée.

III Boucles

Une **boucle** permet de répéter des instructions automatiquement. C'est à partir de maintenant que les programmes deviennent *vraiment* intéressants : ils automatisent des tâches qui seraient bien pénibles pour un humain.

Dans ce TP on se concentre sur la boucle `while`. Le bloc d'instructions (**corps** de la boucle) est répété **tant que** (traduction de *while*) une condition est vérifiée. La syntaxe est tout simplement la suivante :

```
while condition:
    instructions
```

alors lors de l'exécution :
1. Le programme teste si la condition est vraie,
2. Si oui, il exécute le bloc d'instructions. Une fois fini, il recommence à évaluer la condition et ainsi de suite.
3. Sinon, il sort simplement de la boucle et passe à la suite.

Pour que cela soit intéressant, il faut que la condition puisse varier à chaque passage dans la boucle ! Sinon, si elle est toujours vraie, rien ne l'arrête et on obtient une **boucle infinie**… La méthode de base pour répéter une instruction un certain nombre n de fois est de déclarer une variable appelée **compteur**, que l'on va augmenter de 1 (on dit **incrémenter**) à chaque passage dans la boucle, et de tester la condition `i < n` :

```
i = 0
while i < 3:
    print("i =", i)
    i = i + 1
print("fin avec i =", i)
```

produit le résultat suivant :

```
i = 0
i = 1
i = 2
fin avec i = 3
```

Avertissement

Dans chaque boucle, on porte une attention particulière à :
- La valeur à laquelle le compteur est initialisé (essayez avec `i = 1`)
- L'utilisation de la comparaison stricte `<` ou large `<=` (essayez de remplacer par `<=`)
- L'incrémentation au début ou à la fin de la boucle (essayez d'échanger les deux lignes dans le bloc d'instructions),
- Ne pas oublier l'incrémentation (essayez de l'enlever !)

L'exemple ci-dessus est le plus standard et est écrit de telle façon à ce qu'il répète exactement `n` fois.

Exercice 2.7
Écrire un programme qui affiche les nombres x^2 pour $1 \leqslant x \leqslant 10$.

Exercice 2.8
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur un nombre `n` et compte à rebours : affiche `n` puis `n-1` puis… jusqu'à `0`. Il y a deux façons possibles, tester les deux :

1. Incrémenter `i` comme ci-dessus, mais afficher la quantité `n - i`.
2. **Décrémenter** `i`, c'est-à-dire le faire diminuer de 1 avec `i = i - 1`, mais alors il faut changer la condition et la valeur initiale.

IV Application aux suites

Pour calculer les termes successifs d'une suite, on se sert en plus d'une variable `u` qui à chaque passage dans la boucle va devenir le terme suivant. L'exemple de base pour les puissances de 2 est :

```
u = 1
i = 0
while i < 5:
    print(u)
    u = 2 * u
    i = i + 1
```

qui produit l'affichage

```
1
2
4
8
16
```

autrement dit les 5 premières puissances, soit de 2^0 à 2^4.

Exercice 2.9
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur un nombre `n` et calcule la somme $1 + 2 + \cdots + n$.

L'intérêt de la boucle `while`, c'est aussi de pouvoir s'arrêter quand une certaine condition sur la suite devient vérifiée — c'est à dire la continuer **tant que** elle n'est **pas** vérifiée.

Exercice 2.10
Au début de l'an 2024, la population mondiale est estimée à environ 8,08 milliard d'habitants. Elle augmente d'environ 1,12 % chaque année. Écrire un programme qui affiche la population mondiale estimée sur les années futures (afficher à la fois l'année et la population, par exemple `Année 2024 : 8080000000`) si le taux de croissance reste le même, et s'arrête quand elle dépasse milliard.

Exercice 2.11 (*)
La **suite de Syracuse** est la suite entière $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : le nombre $S_0 \geqslant 1$ est à déterminer par l'utilisateur, et ensuite

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n/2 & \text{si } S_n \text{ est pair} \\ 3 \times S_n + 1 & \text{si } S_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Que se passe-t-il si $S_0 = 1$?
2. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur le nombre S_0 puis affiche tous les termes de la suite jusqu'à ce qu'un terme soit égal à 1.
3. La célèbre **conjecture de Syracuse** est l'énoncé selon lequel quelque soit le nombre S_0, la suite finit par retomber sur 1. Il s'agit d'un problème ouvert célèbre…

   Écrire un programme qui nous aide à vérifier cette conjecture, en demandant à l'utilisateur un entier N puis en testant la conjecture pour tout $1 \leqslant S_0 \leqslant N$, affichant pour chaque valeur testée si la conjecture est bien vraie.
4. En plus, pouvez-vous compter, pour chaque S_0, en combien d'étapes la suite revient à 1 ?

On peut vérifier la conjecture pour des valeurs extrêmement grandes, mais ceci ne constitue malheureusement toujours pas une démonstration mathématique…

TP 3
Fonctions

Aujourd'hui et à partir de maintenant nous écrivons avant tout des **fonctions** dans le mode script. Cela permet de faire varier des paramètres, et de récupérer une valeur calculée.

L'exécution d'un code de déclaration de fonction ne produit aucun affichage, il faut donc tester les fonctions dans le mode interactif ou bien directement à la suite du script. On continue à séparer les exercices par des cellules avec les trois caractères `#%%`. On rappelle que le raccourci clavier Ctrl + Entrée permet d'exécuter la cellule ; dans le mode interactif, jouer avec les flèches ↑ et ↓ pour faire réapparaître les entrées précédentes.

I Notion de fonction

I.1 Déclaration et appel

Une fonction correspond à un morceau de programme ré-utilisable, dans lequel on peut faire varier des paramètres. Elle se déclare avec le mot-clé `def`. Étudions l'exemple suivant :

```
def somme(x, y):
    print("La somme de", x, "et de", y, "est", x+y)
```

Ce code est une **déclaration** de fonction, son exécution ne produit rien mais enregistre la fonction.

Les tests suivants en mode interactif permettent de faire varier les paramètres. On parle d'**appel** de la fonction.

```
>>> somme(3, 4)
La somme de 3 et de 4 est 7
>>> somme(-6, 2)
La somme de -6 et de 2 est -4
```

Les variables `x` et `y` s'appellent des **arguments** de la fonction. Une fonction `f` peut avoir un ou plusieurs arguments, ou aucun — dans ce dernier cas l'appel s'écrit juste `f()`. Les arguments peuvent être de n'importe lesquels des types manipulés jusque là.

Ce qui suit le mot-clé `def` forme un **bloc d'instructions**, exactement comme dans les conditions et les boucles. On parle du **corps** de la fonction. Il peut donc contenir lui aussi des variables, des conditions et des boucles.

I.2 L'instruction `return`

Dans le bloc d'instructions, lorsque le programme tombe sur une ligne commençant par `return`, **l'exécution de la fonction s'arrête**. La valeur ou l'expression qui suit est dite **renvoyée par la fonction** et on peut alors récupérer sa valeur. Prenons l'exemple

```
def moyenne(x, y):
    return (x + y) / 2
```

alors l'appel

```
>>> m = moyenne(12, 14)
```

1. Appelle la fonction, en donnant les valeurs `x` ← `12` et `y` ← `14`,
2. Calcule le résultat de `(x + y) / 2` qui donne le nombre `13.0`,
3. **renvoie** ce résultat, et le met ici dans la variable `m` : `m` ← `13.0`.

On peut le vérifier :

```
>>> m
13.0
```

Ce comportement ne serait pas possible si on écrivait `print((x + y) / 2)` au lieu de `return` : la valeur serait bien affichée mais serait ensuite perdue et on ne pourrait pas la récupérer dans une variable. Et il est crucial pour la ré-utilisabilité de la fonction de pouvoir ainsi enregistrer la valeur qu'elle calcule.

L'instruction `return` n'est pas obligatoire. Si l'exécution de la fonction arrive au bout sans avoir rencontré de `return`, elle ne renvoie pas de valeur. Si `return` est présent sans valeur de retour, l'exécution de la fonction s'arrête mais ne renvoie pas de valeur. L'exemple suivant est donc bien valide

```
def f():
    print("Cette fonction n'a pas de paramètres ni de valeur de retour.")
    print("Est-elle pour autant utile ?")
    return
    print("Ceci, par contre, ne s'affichera jamais.")
```

et son appel ne fait qu'afficher toujours le même texte des deux premières lignes.

Un autre exemple instructif est celui-ci, comme son nom l'indique :

```
def divise_proprement(x, y):
    if y == 0:
        print("Il ne faut JAMAIS diviser par 0 !!!")
        return
    return x / y
```

Alors :

1. Si l'argument `y` est `0`, on entre dans le premier `if`. Le message d'avertissement s'affiche. Puis la fonction se termine, à cause du `return`.
2. Sinon, le bloc d'instruction du `if` n'est pas exécuté. La fonction calcule `x / y` et renvoie cette valeur.
3. Remarquez que du coup le `else` n'est pas nécessaire ici : l'instruction `return x / y` se produit uniquement dans le cas où `y` est non-nul, sinon elle s'est arrêtée avant !

Le test donne :

```
>>> q = divise_proprement(6, 2)
>>> q
3.0
# q contient bien une valeur, le résultat
>>> q = divise_proprement(5, 0)
Il ne faut JAMAIS diviser par 0 !!!
>>> q
# ici rien ne s'affiche ! q existe mais ne contient pas de valeur !
```

(en fait, `q` contient la valeur spéciale `None`, qui risque d'apparaitre si on écrit `print(q)`)

À retenir

À partir de maintenant, dans les exercices en TP mais aussi à l'écrit, nous écrivons la plupart du temps des **fonctions**, qui ont des arguments, effectuent un certain calcul, et renvoient le résultat avec `return`. Sauf demande explicite, elles ne font pas de `print()` (le résultat calculé est renvoyé, c'est l'utilisateur qui décidera ce qu'il fait avec, ce n'est pas la fonction qui décide de comment elle va l'afficher) ni de `input()` (de même, les arguments sont passés à la fonction par l'utilisateur, ce n'est pas à la fonction de décider avec quel message elle va les demander).

I.3 Notion de variable locale

Une fonction a bien le droit d'utiliser des variables dans son corps, et les arguments eux-mêmes sont des variables à part entière. Cependant, à moins que ces variables soient renvoyées avec un `return`, elles sont **détruites** à la fin de l'exécution de la fonction et donc ne sont pas accessibles au reste du programme. On parle de **variables locales**. Reprenons l'exemple

```
def moyenne(x, y):
    m = (x + y) / 2
    return m
```

alors en mode interactif

```
>>> moyenne(12, 14)
13.0
>>> x
NameError: name 'x' is not defined
>>> m
NameError: name 'm' is not defined
```

Ces variables n'existent plus !

Cela correspond à la notion mathématique de variable non-libre, on dit aussi *liée* ou *muette*.

Cela signifie aussi que l'on peut écrire

```
>>> m = 10
>>> moyenne(12, 14)
13.0
>>> m
10
```

car la variable `m` qui est manipulée à l'intérieure de la fonction n'est pas vraiment la même que celle qui pourrait déjà exister avant.

II À vous de jouer !

Les fonctions suivantes ne font pas intervenir de connaissances en Python autres que celles vues dans les TP précédents, mais la mise en forme est différente : les fonctions ont des arguments, font des calculs, utilisent éventuellement des variables locales, des conditions et des boucles, et renvoient une valeur avec `return`.

Exercice 3.1
Écrire la fonction `perimetre_rectangle(a, b)` qui renvoie le périmètre du rectangle de côtés a et b.

Exercice 3.2
Écrire la fonction `valeur_absolue(x)` qui renvoie la valeur absolue de `x`.

Exercice 3.3
Écrire la fonction `maximum(a, b, c)` qui renvoie le plus grand des trois nombres entre `a`, `b` et `c`.

Exercice 3.4
1. Écrire la fonction `partie_entiere(x)` qui prend en argument un nombre à virgule flottante `x`, qui pour l'instant ne marchera que si `x` est positif, et qui calcule sa partie entière de la façon suivante : une boucle `while` cherche le plus grand entier `n` qui est inférieur ou égal à `x`.
2. Bonus : améliorer la fonction pour traiter séparément le cas où `x` est négatif. Attention à bien la tester dans tous les cas, `x` positif ou négatif, entier ou non.

Exercice 3.5
Écrire la fonction qui calcule la partie entière de la racine carrée sans utiliser la fonction partie entière ni la fonction racine carrée (*Hein ?*)

III L'aide

Toutes les fonctions définies en Python possèdent une aide accessible (en mode interactif) avec la commande `help()` : testez

```
>>> help(abs)
```

Chacun peut créer de la documentation pour sa propre fonction en insérant juste après la déclaration du texte entre trois guillemets doubles successifs `""" documentation """`, ce que Python appelle une **docstring**, contraction de *documentation string* (chaine de documentation), et qui peut même tenir sur plusieurs lignes :

```
def moyenne(x, y):
    """ C'est MA fonction qui calcule la moyenne.
        Entrez deux nombres x et y, et elle vous donne la moyenne. """
    return (x + y) / 2
```

Lancer le programme puis essayer en mode interactif :

```
>>> help(moyenne)
```

La possibilité d'intégrer la documentation dans le corps même de la fonction, de naviguer dans l'aide en mode interactif, et la grande qualité de la documentation Python déjà existante, contribuent pour beaucoup à la diffusion de ce langage et à sa facilité d'apprentissage. C'est une bonne pratique de documenter son programme pour que d'autres puissent l'utiliser.

Exercice 3.6
Remplir soigneusement les documentations des fonctions de la partie II.

IV Les modules

Un **module** (ou aussi : bibliothèque, librairie) est un ensemble de fonctions. Elles sont groupées par thème et permettent de donner des nouvelles possibilités au langage. Les modules Python de base permettent de trouver les fonctions mathématiques, les nombres aléatoires, l'écriture dans des fichiers, mais aussi de connaitre la date, communiquer en réseau, traiter des images… Cela contribue au succès de Python d'avoir des milliers de bibliothèques disponibles et d'interagir dans autant de situations.

Un module se charge (une fois pour toute !) avec la commande `import`, écrite en mode interactif ou avant le code qui va l'utiliser, qui a plusieurs syntaxes. Prenons pour exemple le module `math` qui comporte beaucoup de fonctions mathématiques comme la fonction exponentielle `exp()`, la fonction sinus `sin()`, et la constante mathématique `pi`. Il n'est pas chargé par défaut, donc on ne peut pas les utiliser tout de suite. On a les possibilités suivantes, avec des différences dans la manière dont sont ensuite nommées les fonctions :

- Importer tout, et y accéder avec le préfixe :

```
import math
math.exp(x), math.sin(x), math.pi, ...
```

- Importer seulement les fonctions dont on a besoin, et y accéder sans préfixe :

```
from math import exp, sin, pi
exp(x), sin(x), pi
```

- Il est courant aussi de donner un **alias** au module, introduit avec le mot-clé `as` :

```
import math as m
m.exp(x), m.sin(x), m.pi, ...
```

Exemple courant : le sous-module `pyplot` du module `matplotlib` est un peu long à écrire

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(), plt.show(), ...
```

Cela marche aussi avec les fonctions et variables elles-mêmes, bien que l'utilité en soit discutable…

```
from math import pi as plus_beau_nombre_de_l_univers
print(plus_beau_nombre_de_l_univers)
# 3.141592653589793
```

- On trouve aussi parfois la syntaxe

```
from math import *
```

qui importe d'un coup **toutes** les fonctions du module, sans le préfixe. **Cette syntaxe est déconseillée** car le module peut contenir beaucoup de fonctions et on ne sait pas forcément à l'avance lesquelles… Si l'utilisateur a déjà une fonction `f` et que le module contient lui-même une fonction aussi nommée `f`, alors celle de l'utilisateur sera « désactivée » après l'importation et remplacée par celle du module ! Et si on importe plusieurs modules contenant chacun une fonction `f`, on ne sait plus à laquelle on fait référence !

Un module possède aussi une documentation, accessible une fois chargé :

```
>>> import math
>>> help(math)
```

Exercice 3.7
Importer le module `math` comme ci-dessus, lire sa documentation, et éventuellement celle des fonctions contenues dedans, et trouver :

1. La fonction racine carrée,
2. La fonction partie entière,
3. Les PGCD (plus grand commun diviseur) et PPCM (plus petit commun multiple).

… d'ailleurs, il y a plusieurs parties entières ? Quelle différence avec la conversion de type `int()` ? Tester avec plusieurs valeurs, entières ou non, positives ou négatives.

Remarque.

- On a donné ici diverses syntaxes ; le but est d'être capable de les reconnaitre et les interpréter, pas de tout savoir par cœur. En général, un sujet de concours qui utilise un module précise comment il est importé, par exemple « on suppose qu'on a importé le module `math` avec la commande `import math as m` » et donc il faut savoir que les fonctions s'appellent alors `m.exp(x)`, `m.sin(x)`, etc. Si ce n'est pas précisé, alors cela peut être au candidat de ne pas oublier d'écrire la commande d'importation !
- Aux épreuves orales le candidat peut être devant un ordinateur avec le logiciel Pyzo. Si bien entendu il ne pourra pas accéder librement à tout l'internet, utiliser l'aide intégrée de Python est parfaitement légal.

Exercice 3.8
Écrire une fonction Python qui correspond à la fonction mathématique

$$f : x \mapsto \sin^3(2\pi x)e^{\sqrt{x}}$$

Un autre module d'intérêt est le module `random`, lié à tout ce qui est l'aléatoire, qui contient la fonction `randint` générant un nombre aléatoire entier. Nous l'approfondirons en lien avec les chapitres de probabilités.

Exercice 3.9
Importer uniquement cette fonction, lire sa documentation, et écrire une fonction `dés(n)` qui affiche `n` fois de suite le résultat d'un lancer de dé cubique aléatoire.

Exercice 3.10
Écrire une fonction `réponse()` qui, en tirant au hasard un nombre entre 1 et 4, renvoie un choix aléatoire entre les mots `"oui"`, `"non"`, `"peut-être"` ou `"je ne sais pas"`.

V D'autres exercices

La commande spéciale `assert`, suivie d'une condition et éventuellement d'un message d'erreur, permet de faire échouer tout le programme, en provoquant une erreur (en rouge) et en affichant le message, si la condition **n'est pas** vérifiée. On écrit par exemple une ligne

```
assert x >= 0, "x doit être positif"
```

Le verbe anglais *assert* (comme dans *assertion*) se traduit ici avec le sens plus fort de « affirmer que », autrement dit on affirme que `x` doit être positif pour pouvoir continuer. Cela lui donne un sens proche du langage mathématique « supposons $x \geqslant 0$ » — si ce n'est pas le cas alors la suite n'a pas de sens.

Il est courant qu'une fonction démarre par une ou plusieurs assertions qui servent à vérifier si les arguments donnés sont bien valides et évitent de faire des calculs qui provoqueront plus tard une erreur ou donneront des résultats incohérents. Par exemple la fonction `divise_proprement` de § I.2 peut s'écrire

```
def divise_proprement(x, y):
    assert y != 0, "Il ne faut JAMAIS diviser par 0 !!!"
    return x / y
```

et l'exécution s'affiche comme un message d'erreur Python

```
>>> divise_proprement(5, 0)
AssertionError: Il ne faut JAMAIS diviser par 0 !!!
```

Dans les exercices suivants, vous pouvez utiliser `assert` pour éviter que les programmes donnent des erreurs, des boucles infinies ou des résultats incohérents.

Exercice 3.11
La *moyenne harmonique* de deux nombres x, y tous les deux strictement positifs ou strictement négatifs est l'unique nombre H tel que

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Écrire une fonction `moyenne_harmonique(x, y)` qui renvoie la moyenne harmonique de `x` et de `y`.

Exercice 3.12
Écrire une fonction `seuil(t)` qui prend en argument un nombre réel `t` et renvoie le plus petit entier $n > 0$ pour lequel

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant t.$$

Tester des valeurs de `t` de plus en plus grandes entre 3 et 20 (doucement, pas à pas !)

Bonus : dans une deuxième fonction, afficher les valeurs de $t-\ln(\text{seuil}(t))$ pour t de plus en plus grand (par exemple pour tout $5\leqslant t\leqslant 16$ en sautant de 0,2). Que constate-t-on ?

Remarque. Il n'est jamais exigé des étudiants d'utiliser `assert`, et c'est même très déconseillé à l'écrit. En effet en algorithmique on considère que le programme est correct seulement s'il l'est quand on lui donne des bonnes valeurs, et c'est l'utilisateur qui est responsable de donner les bonnes valeurs. Par exemple une phrase telle que « écrire une fonction qui prend en argument un réel x supposé positif… » se comprend comme : la fonction doit donner le bon résultat si $x\geqslant 0$, on ne se préoccupe pas du reste. Ce n'est pas tout à fait la même façon de penser que si on écrivait un programme convivial qui devrait gérer toutes les erreurs possibles en prévenant l'utilisateur que ses valeurs sont incorrectes, en lui demandant de recommencer, etc et cela est en fait un problème assez compliqué à gérer.

On rappelle que la divisibilité se teste à partir de l'opération `%`.

Exercice 3.13

1. Écrire une fonction `est_premier(n)` qui prend en argument un entier n en supposant $n\geqslant 2$ et qui renvoie `True` si n est premier et `False` sinon, en tentant de diviser n par tous les entiers inférieurs à n.
2. En déduire une fonctions `premiers(n)` qui affiche tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

TP 4
Boucles for

Dans ce TP nous approfondissons sur les boucles, et les applications mathématiques aux calculs de suites et de sommes.

À partir de maintenant, dans les exercices, les programmes sont la plupart du temps contenus dans des **fonctions** avec éventuellement des paramètres et une valeur de retour. Cela permet de les ré-utiliser autant qu'on veut en faisant varier un paramètre, mais sans utiliser `input()`.

I Boucles simples

La boucle `for` sert à répéter un bloc d'instructions un certain nombre de fois. Dans sa syntaxe de base, elle prend la forme

```
for i in range(a, b):
    instructions
```

qui est exactement équivalente à

```
i = a
while i < b:
    instructions
    i = i + 1
```

Autrement dit elle répète en faisant varier l'indice i avec $a \leqslant i < b$. Nous verrons qu'elle est un peu plus pratique quand on sait à l'avance combien de fois on veut répéter les instructions. Essai :

```
for i in range(1, 5):
    print(i)
```

produit bien

```
1
2
3
4
```

Un fait remarquable auquel il faudra s'habituer est que **la borne `b` est exclue**. Il existe aussi `range(n)` qui est exactement équivalent à `range(0, n)`.

À retenir

`range(n)` répète `n` fois, avec `i` qui varie entre `0` et `n-1` inclus.

Éventuellement, un troisième argument `range(a, b, r)` consiste à faire des sauts de taille `r` au lieu de 1. Cela correspond, dans la traduction en terme de boucle `while` ci-dessus, à remplacer la ligne `i = i + 1` par `i = i + r`. On ne l'utilisera pas tous les jours.

Éventuellement aussi, le caractère `_` permet de ne pas donner de nom à la variable indice de la boucle. Ainsi `for _ in range(n)` a réellement le sens de « répéter `n` fois ».

C'est l'heure de démarrer le TP !

```
nom = "..." # insérez votre prénom
for _ in range(3):
    print("Au travail", nom)
```

Exercice 4.1
Vous connaissez la chanson

```
1 kilomètre à pieds, ça use, ça use,
1 kilomètre à pieds, ça use les souliers.
...
```

Écrire une fonction `kilometres(n)` qui affiche les paroles pendant `n` kilomètres.

Une application plus sérieuse des boucles `for` est pour le calcul des suites et des sommes, que nous avons déjà abordé. L'exemple de base est la fonction suivante qui calcule et renvoie le nombre 2^n :

```
def puissance2(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = 2 * u
    return u
```

par exemple

```
>>> puissance2(5):
32
```

Il faut remarquer que :

1. La variable `u` représente la valeur de 2^i en entrant dans la boucle, en particulier c'est 2^0 avant de rentrer dans la boucle.
2. La variable `u` représente 2^{i+1} à la fin de la boucle. L'étape `u = 2 * u` fait « avancer d'un cran » la suite.
3. Lors de la dernière itération, $i = n - 1$ et donc à la fin `u` représente bien 2^n.
4. … d'ailleurs on répète n fois l'opération de multiplier `u` par 2, en partant de 1, donc le résultat est bien 2^n.

Avertissement

Il est **très important** de se poser ce genre de questions quand on utilise des boucles pour calculer des suites et des sommes, notamment ce qui se passe au début et à la fin. Cela sera source de **nombreux** problèmes et pièges. Une possibilité est d'écrire clairement, en commentaire ou sur son brouillon, une phrase telle que « `u` représente 2^i en début de boucle ».

Les exercices suivants sont les plus proches possible des questions posées à l'écrit. Pour tester son programme, on pourra aussi afficher les valeurs de la variable `u` dans la boucle.

Exercice 4.2
Écrire une fonction `suite(n)` qui renvoie le terme u_n de la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

Exercice 4.3
La **factorielle** de l'entier $n \geqslant 1$ est le produit $1 \times 2 \times \cdots \times n$. On convient que pour $n = 0$ c'est 1 (c'est cohérent).

Écrire une fonction `factoriel(n)` qui calcule la factorielle de l'entier n.

Exercice 4.4
La **suite de Fibonacci** est la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Pour calculer les termes d'une telle suite on a besoin d'une boucle `for` avec *deux* variables : `u` qui représente la valeur de F_i et `v` qui représente F_{i+1}.

Écrire une fonction `fibonacci(n)` qui calcule le terme F_n.

Dans le cas des sommes, la variable qui représente le terme de la suite se nomme plutôt `S` et s'appelle **variable accumulatrice**, car elle accumule la somme de plus en plus de termes. Elle est toujours initialisée à 0 (si aucune somme ne se produit, la valeur de retour doit être 0) et dans la boucle elle évolue selon une formule du type `S = S + ...` (le nouveau terme à sommer).

Exercice 4.5
Écrire une fonction `somme_cubes(n)` qui calcule et renvoie le résultat de la somme $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Bonus : vérifier sur les 10 premières valeurs de n que la somme est bien égale à $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4.6
Écrire une fonction `somme_inverse_factoriel(n)` qui calcule et renvoie le résultat de la somme des $\frac{1}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, c'est à dire $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}$ (avec $\frac{1}{0!} = 1$ et $\frac{1}{1!} = 1$). Tester la fonction pour des valeurs de plus en plus grandes.

Bonus : pouvez-vous l'écrire *sans* faire appel à la fonction `factoriel` précédente ?

Remarque. Parfois, on veut calculer les termes de la suite et arrêter la boucle quand une certaine condition est vérifiée, par exemple quand u_n dépasse une certaine valeur fixée à l'avance. Dans ce cas il faut revenir à une boucle `while` — la partie qui calcule les termes de la suite reste la même, et on rajoute à la main l'initialisation de `i` avant la boucle et l'incrémentation `i = i + 1` dedans (pour être cohérent, l'incrémentation *en fin de boucle*). Revoir pour cela les TP précédents et leur correction.

II Boucles doubles

Pour parcourir l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour deux indices indépendants `i` et `j`, il est nécessaire d'utiliser une **boucle double**, ce qui n'est rien de plus qu'une boucle située dans le corps d'une autre boucle. Mais il est important d'en comprendre précisément le mécanisme.

Exercice 4.7
Tester et comparer les deux programmes suivants :

```
for i in range(3):
    for j in range(3):
        print("i =", i, "j =", j)
```

```
for j in range(3):
    for i in range(3):
        print("i =", i, "j =", j)
```

Que se passe-t-il ?

Observer que ce sont deux ordres naturels pour énumérer le carré d'indices $(i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$.

$i \setminus j$	0	1	2
0	`i = 0 j = 0`	`i = 0 j = 1`	`i = 0 j = 2`
1	`i = 1 j = 0`	`i = 1 j = 1`	`i = 1 j = 2`
2	`i = 2 j = 0`	`i = 2 j = 1`	`i = 2 j = 2`

Exercice 4.8
On souhaite écrire une fonction (sans arguments ni valeur de retour) qui affiche la table de multiplication, la plus classique, des nombres de 1 à 10.

1. Écrire une fonction `table` qui affiche la table, produisant le résultat suivant :

```
1 * 1 = 1
1 * 2 = 2
1 * 3 = 3
...
1 * 10 = 10
2 * 1 = 2
2 * 2 = 4
2 * 3 = 6
...
10 * 10 = 100
```

2. On souhaite maintenant formater la table en carré, dans le but de produire le résultat suivant :

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2 4 6 8 ...
3 6 9 12 ...
...
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
```

Pour cela on a besoin de savoir que
- Dans la commande `print()`, rajouter l'argument final `end=""` désactive le saut de ligne automatique (en fait, cela remplace le caractère de saut de ligne ajouté automatiquement par la chaine vide, donc il ne se passe rien) : `print(x, end="")`.
- Et `print()` sans argument effectue un simple saut de ligne.

Écrire cette fonction, qu'on appellera `table_carré()`.

3. Bonus : on souhaite enfin aligner correctement les colonnes, pour obtenir

```
  1   2   3   4   5   6   7   8   9  10
  2   4   6   8 ...
  3   6   9  12 ...
... ... ... ...
 10  20  30  40  50  60  70  80  90 100
```

Pour cela on utilise les chaines formatées : la syntaxe `print(f"{x:4d}")` affiche le nombre entier `x` en prenant l'espace de 4 caractères, serré à droite. Si `x = 10` la chaine `f"{x:4d}"` est ainsi remplacée par `"  10"` (le `f` devant signifie que la chaine doit être formatée, le `x` est le nom de la variable, et `4d` est l'un des nombreux codes de formatage signifiant ici *entier affiché sur 4 caractères*).

Écrire cette fonction, qu'on appellera `table_carré_joli()`.

Exercice 4.9
Un **triplet pythagoricien** est la donnée de trois nombres $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

On souhaite afficher tous les triplets pythagoriciens. Remarquons que :

1. On peut toujours changer l'un des nombres en son opposé et on obtient toujours un triplet pythagoricien. On se limitera donc aux triplets de nombres positifs.
2. Il y a des solutions évidentes pour $a = 0$ (avec $b = c$) et pour $b = 0$ (avec $a = c$). On peut donc même chercher les solutions où a et b sont strictement positifs.
3. Il peut y avoir une infinité de solutions. Il faut donc fixer un entier N et chercher les solutions (a, b, c) avec $a \leqslant N$, $b \leqslant N$, $c \leqslant N$.

Écrire une fonction `pythagore(N)` qui affiche tous les triplets pythagoriciens avec (a, b, c) comme ci-dessus.

Bonus : chaque triplet apparait deux fois, en échangeant a et b. Pouvez-vous les énumérer de telle façon à ce que chaque triplet n'apparaisse qu'une seule fois ?

III D'autres types d'itération

La boucle `for` fait bien plus que tout cela…

Un **tuple** est la donnée de deux ou plusieurs objets Python, entre parenthèses et séparés par des virgules. Cela forme un nouveau type qui correspond directement à la notion de produit cartésien en mathématiques. Par exemple la variable

```
>>> t = (4, 17)
>>> type(t)
<class 'tuple'>
```

est construite à partir de deux nombres et est de type `tuple`. Il est alors possible de la **récupérer ses valeurs** avec la syntaxe

```
>>> (x, y) = t
>>> x
4
>>> y
17
```

qui va alors créer d'un coup deux nouvelles variables `x` et `y`. Attention, ce n'est pas du tout la même chose que `t = (x, y)`, qui elle crée un tuple à partir de deux variables existantes `x` et `y`. Les composantes d'un tuple peuvent en fait être de tous les types vus précédemment.

Il possible d'**itérer sur les éléments d'un tuple**. Dans le boucle suivante, la variable `x` prend successivement les valeurs des composantes de `t`. Testez-la !

```
t = ("mathématiques", "physique-chimie", "SVT"):
for x in t:
    print("J'aime le cours de", x, "car je suis en BCPST.")
```

Exercice 4.10
Écrire un programme, le plus court possible, qui affiche les valeurs de `somme_inverse_factoriel(n)` de § I pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 10$ et $n = 20$.

Un autre intérêt des tuples est de fournir une syntaxe rapide et pratique pour échanger deux variables : c'est tout simplement

```
(y, x) = (x, y)
```

sans avoir besoin d'écrire une variable intermédiaire.

Ils sont aussi faciles à utiliser pour une fonction qui doit renvoyer *deux* valeurs.

Exercice 4.11
On reprend la suite de Fibonacci de l'exercice 4. Écrire une fonction `quotients(n)` qui renvoie le couple $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)$. Puis tester cette fonction pour tous les n entre 1 et 10. Qu'observe-t-on ?

Enfin nous verrons au TP suivant qu'une boucle `for` est utile pour obtenir uns par uns les caractères d'une chaine. Le code suivant

```
s = "BCPST"
for x in s:
    print(x)
```

produit le résultat

```
B
C
P
S
T
```

autrement dit la variable `x` prend successivement pour valeurs les caractères de la chaine `s`. On parle d'**itération sur une chaine de caractères**.

TP 5
Listes

Les listes constituent le dernier concept absolument fondamental du langage Python que nous étudions dans ce début d'année. Le lien avec les boucles `for`, ainsi qu'avec les calculs de suites et de sommes, apparaitra rapidement. Puis les listes permettront de poser de nombreuses questions algorithmiques nouvelles.

I Notion de liste

Une liste sert à contenir plusieurs objets, rangés les uns à la suite des autres. Ils sont écrits entre crochets et séparés par des virgules. Les listes sont des types de variables à part entière, qu'on peut mettre dans les variables ou donner en argument à des fonctions. Voici par exemple une liste de cinq nombres impairs :

```
L = [1, 3, 5, 7, 9]
```

Mais les éléments de la liste peuvent être de type quelconque, et même pas forcément tous du même type ! Voici par exemple une liste de courses :

```
courses = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
```

I.1 Accès aux éléments

Les éléments d'une liste sont numérotés à partir de 0. À tout moment on peut accéder au i-ème élément de la liste, et aussi le modifier. Avec les listes ci-dessus :

```
>>> courses = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
>>> courses[0]
'oeufs'
>>> courses[2]
'riz'
>>> courses[2] = "pâtes"
>>> courses
['oeufs', 'pain', 'pâtes', 'beurre']
```

La fonction `len(L)` donne la longueur de la liste `L`. **Dans une liste de longueur n, les éléments sont numérotés de 0 à $n-1$ inclus**. En mathématiques on noterait par exemple $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ une telle liste. Ce sont les même conventions que pour `range(n)`, et ce sera bien pratique.

```
>>> courses = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
>>> len(courses)
4
>>> L = [1, 3, 5, 7, 9]
>>> len(L)
5
```

Les indices négatifs correspondent à parcourir la liste en sens inverse.

```
>>> courses = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
>>> course[-1]
'beurre'
>>> course[-2]
'riz'
```

Si les indices dépassent la longueur de la liste, on obtient une erreur.

```
>>> courses = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
>>> course[4]
IndexError: list index out of range
```

Cette erreur est extrêmement fréquente : la liste est de longueur 4, donc le dernier élément est `courses[3]`, il n'y a pas d'élément d'indice au-delà de 4…

Enfin la **liste vide** est notée tout simplement `[]` et est de longueur 0. Elle sera loin d'être inutile.

Exercice 5.1
Créez une liste `repas` contenant votre dernier repas, et testez vous-même les syntaxes précédentes.

I.2 Opérations sur les listes

L'opération `+` entre listes s'appelle la **concaténation**. La liste `L + M` est composée de la liste `L` à laquelle est mise bout à bout la liste `M`.

```
>>> ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"] + ["fromage", "pommes"]
['oeufs', 'pain', 'riz', 'beurre', 'fromage', 'pommes']
```

Exercice 5.2
Ajoutez à votre liste `repas` de l'exercice 1 une nouvelle liste contenant le repas dont vous rêvez.

Pour un nombre entier `n` il y a aussi une opération de multiplication `*` entre une liste et `n` : le résultat `L * n` est la même chose que `L + L + ... + L` (`n` fois).

```
>>> ["oui", "non"] * 3
['oui', 'non', 'oui', 'non', 'oui', 'non']
```

Exercice 5.3
Quelle est la syntaxe la plus simple pour créer une liste de n zéros ?

Nous avons déjà vu ces opérations sur les chaines de caractères. Revoir le TP 1 : l'opération `+` « colle » deux chaines de caractères

```
>>> "BCPST" + "1B"
'BCPST1B'
```

et l'accès au i-ème caractère suit les mêmes règles, si `s = "BCPST"` alors `len(s)` est 5, `s[0]` est le caractère seul `B` et `s[4]` est le `T`, qui est aussi `s[-1]` ici.

Une opération encore plus courante consiste à ajouter un élément `x` seul à la fin de la liste `L`. Pour cela la syntaxe est `L.append(x)`. Cette opération ne renvoie pas de valeur (en mode interactif, rien ne s'affichera), mais modifie la liste elle-même :

```
>>> L = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
>>> L.append("fromage")
>>> L
['oeufs', 'pain', 'riz', 'beurre', 'fromage']
```

Exercice 5.4
Dans votre liste `repas`, ajoutez un légume puis un fruit, c'est important pour la santé !!!

L'opération « inverse » est `L.pop()` qui supprime le dernier élément de la liste **et le renvoie**. Ainsi on peut récupérer l'élément avec `x = L.pop()` pendant qu'il est supprimé de `L`. Avec la même liste précédente :

```
>>> L
['oeufs', 'pain', 'riz', 'beurre', 'fromage']
>>> x = L.pop()
>>> L
['oeufs', 'pain', 'riz', 'beurre']
>>> x
'fromage'
```

Remarque. Qu'est-ce que c'est que cette syntaxe ? Et pourquoi pas une syntaxe telle que `append(L, x)` ou bien `L = append(L, x)` ?

C'est la première fois que nous la rencontrons vraiment. Disons en première approche que tout se passe comme si *chaque* liste `L` venait avec *sa* propre fonction `append()` qui peut modifier la liste ; pour une autre liste `M` ce sera `M.append(x)`. Remarquez que les autres opérations vues jusque là ne modifiaient pas la liste `L`, alors que **`append` et `pop` modifient la liste elle-même**. On parle de **méthodes** plutôt que de fonctions. Dans l'aide interactive `help(list)` on trouve toutes les méthodes de base applicables sur les listes.

Une autre possibilité, qui donne en apparence exactement le même résultat final, est d'écrire

```
L = L + [x]
```

Cependant cela oblige à :
1. Créer une liste `[x]` ne contenant qu'un seul élément `x`,
2. Concaténer cette liste au bout de `L`,
3. Modifier la variable `L` pour que cela devienne ce `L + [x]` qu'on vient de former,

Cela constitue en fait beaucoup plus d'opérations pour l'ordinateur.

À retenir

`append` et `pop` modifient la liste elle-même, alors que `+` et `*` ne sont que des opérations comme les autres, dont le résultat est une nouvelle liste qui peut ensuite être mis dans une variable.

Remarque. Quand on les manipule uniquement avec `append` et `pop`, les listes se comportent comme des **piles** — exactement comme une pile de livres sur son bureau. Les opérations de base consistent à poser un élément sur le haut de la pile, ou à récupérer l'élément du dessus. On récupère ainsi les éléments selon l'ordre inverse duquel on les a ajoutés. Si on applique `pop` sur une liste vide, on obtient une erreur `IndexError: pop from empty list` car il n'y a plus rien à enlever.

II Méthode : itérer sur les listes

En pratique, si on reçoit une liste quelconque `L`, on ne sait pas forcément à l'avance quels sont ses éléments. Il est nécessaire d'utiliser une boucle pour « effectuer une opération » sur chaque élément de la liste. On parle de **parcourir la liste**.

La méthode de base s'appelle **itérer sur les indices**. Une liste de longueur n est numérotée de 0 à $n-1$ et donc une boucle `for i in range(n)` va parcourir tous les indices de la liste, permettant d'accéder à `L[i]` et de faire une opération dessus. Remarquez que la convention de numérotation des listes est bien compatible avec celle de `range`. Exemple :

```
L = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
for i in range(len(L)):
    print("indice :", i, "élément :", L[i])
```

produit le résultat

```
indice : 0 élément : oeufs
indice : 1 élément : pain
indice : 2 élément : riz
indice : 3 élément : beurre
```

C'est intéressant quand ces morceaux de programme font partie d'une fonction. Donnons l'exemple suivant qui lit une liste de nombres et affiche le double de chacun.

```
def double(L):
    for i in range(len(L)):
        print(2 * L[i])
```

Essai :

```
>>> L = [1, 3, 5]
>>> double(L)
2
6
10
```

Exercice 5.5
Écrire une fonction `signe(L)` qui prend en argument une liste `L` de nombres et qui affiche pour chacun des éléments le mot `positif`, `négatif` ou `nul`, selon son signe. On doit par exemple avoir :

```
>>> signe([4, 0, 7, -5])
positif
nul
positif
négatif
```

Ce principe fonctionne de la même façon sur les chaines de caractères, pour pouvoir effectuer une opération sur les caractères uns par uns : la boucle

```
s = "BCPST"
for i in range(len(s)):
    print(s[i])
```

produit

```
B
C
P
S
T
```

Exercice 5.6
Écrire une fonction `ADN(s)` qui prend en argument une chaine de caractères `s`, qu'on suppose composée uniquement des lettres `A`, `C`, `G`, `T`, et qui affiche un par un le nom correspondant adénine, cytosine, guanine, thymine.

III Méthode : créer une liste à partir de zéros

Quand on sait à l'avance qu'on veut une liste de n nombres, une méthode intéressante est de commencer par créer une liste de n zéros avec la syntaxe `L = [0] * n`, puis de remplir la liste au fur et à mesure. C'est particulièrement intéressant pour les suites dont chaque terme dépend du ou des précédents.

Un exemple de base est la fonction qui crée la liste des n premières puissances de 2 :

```
def puissances2(n):
    L = [0] * n
    L[0] = 1
    for i in range(1, n):
        L[i] = 2 * L[i-1]
    return L
```

Remarquez comme la formulation ressemble à la définition d'une suite $(u_i)_{0\leqslant i<n}$ avec $u_0 = 1$ et $\forall 1 \leqslant i < n$, $u_i = 2 \times u_{i-1}$. Remarquez bien les bornes de la boucle `for`, puisqu'on veut écrire `L[i-1]` il faut partir de `i` à 1 et pas 0… L'exécution donne bien le résultat voulu, les puissances de 2^0 à 2^4 :

```
>>> puissance2(5)
[1, 2, 4, 8, 16]
```

Exercice 5.7
Écrire une fonction `factoriel(n)` *(encore ?)*, qui renvoie la liste des valeurs $i!$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$, où $i! = 1 \times 2 \times \cdots \times i$, et pour $i = 0$ c'est 1.

Le cas des suites récurrentes d'ordre 2 n'est pas du tout plus difficile : chaque terme de la suite dépend des deux termes précédents, mais précisément la liste sert à se souvenir de *tous* les termes précédents, donc il n'y a pas besoin d'astuce particulière comme au TP précédent.

Exercice 5.8
Écrire une fonction `fibonacci(n)` *(encore ? et ce n'est que le début)* qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite de Fibonacci $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall i \geqslant 0$, $F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$.

IV Méthode : créer une liste par append successifs

Une autre méthode courante pour créer des listes est de démarrer avec une liste vide `L = []` et d'utiliser des appels à `L.append()` pour ajouter des éléments uns par uns. Cela est intéressant notamment quand on ne connait pas à l'avance la taille de la liste finale, on étudie un certain problème ou une certaine équation et on rajoute des solutions qu'on trouve au fur et à mesure.

Comme exemple de base, donnons une fonction qui prend en argument une liste `L` et renvoie une liste `P` constituée uniquement des termes de `L` qui sont positifs (donc ici c'est `P` qui grandit donc on utilise `P.append()`).

```
def garde_positifs(L):
    P = []
    for i in range(len(L)):
        if L[i] >= 0:
            P.append(L[i])
    return P
```

Test :

```
>>> garde_positifs([4, -8, -2, -5, 0, 1, 1, 6, 6, -2, 2, 1])
[4, 0, 1, 1, 6, 6, 2, 1]
```

Exercice 5.9
Pour un caractère seul `x`, la méthode `x.isupper()` renvoie un booléen `True` si `x` est en majuscule, et `False` sinon.

Écrire un fonction `acronyme(s)` qui prend en argument une chaine de caractères `s` et qui renvoie la liste de tous les caractères majuscules de `s`.

Exemple :

```
>>> acronyme("Biologie, Chimie, Physique et Sciences de la Terre")
['B', 'C', 'P', 'S', 'T']
```

Bonus : pour une *liste* `L` de *chaines de caractères*, la méthode `"".join(L)` colle tous les termes de la liste en une seule chaine de caractères (la syntaxe signifie ici « joindre les éléments de `L` autour de la chaine vide `""` », qu'on pourrait remplacer par n'importe quel caractères de séparation comme `" "` ou `", "`). Reprendre la fonction en renvoyant non pas une liste mais une chaine de caractères.

Exercice 5.10 *Équation de Pell-Fermat*
On recherche des solutions entières à l'équation suivante :

$$x^2 - 3y^2 = 1, \quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$$

Comme il pourrait y avoir une infinité de solutions (il se peut très bien que x et y soient tous les deux extrêmement grands et que pourtant la différence $x^2 - 3y^2$ soit petite), pour écrire un programme il faut choisir un paramètre N et chercher les solutions (x, y) avec x et y inférieurs à N. De plus, il apparait que si (x, y) est une solution alors on obtient de nouvelles solutions en remplaçant x par $-x$, ou aussi y par $-y$. Bref, on cherche des solutions avec $0 \leqslant x \leqslant N$ et $0 \leqslant y \leqslant N$.

1. Écrire une fonction `pell_fermat(N)` qui *affiche* les solutions trouvées (x, y) à l'équation de Pell-Fermat avec $0 \leqslant x \leqslant N$ et $0 \leqslant y \leqslant N$.
2. Améliorer la fonction pour qu'elle renvoie la liste des couples (type `tuple`) de solutions trouvés.

L'exercice suivant résume bien tout, peut-être à traiter à la toute fin du TP.

Exercice 5.11 (*)
Le **crible d'Eratosthène** est une ancienne méthode pour trouver tous les nombres premiers jusqu'à n. Il fonctionne de la façon suivante (on rappelle que 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers) :

- On écrit tous les nombres à la suite, de 2 à n,
- On barre tous les multiples de 2, sauf 2,
- On barre tous les multiples de 3, sauf 3,
- On avance à 5 (car 4 est barré), puis on barre tous les multiples de 5,
- Et ainsi de suite, on avance au premier nombre non barré (qui est donc premier) et on barre tous ses multiples.

On souhaite s'inspirer de cette méthode pour générer la liste de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

1. Dans un premier temps on modélise le problème avec une liste `L` de booléens `True` ou `False`, où on interprète `L[i] = False` comme « l'entier i est barré » et donc `L[i] = True` comme « non-barré ». Pour bien aligner les indices, on décide que `L[0]` correspond bien au nombre 0 (même si on sait qu'il n'est pas premier ; on peut donc dès le début le mettre à `False`) et de même `L[1]` correspond à 1 qui est aussi `False`. La liste `L` est donc de longueur $n + 1$.

   Écrire une fonction `crible(n)` qui renvoie ainsi la liste de booléens correspondant aux nombres premiers inférieurs à n.

   Comme les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, la liste résultat doit commencer par

   ```
   [False, False, True, True, False, True, False, True, False, False, ...]
   ```

2. En déduire une fonction `liste_premiers(n)` qui, à l'aide de la précédente, renvoie la liste de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à `n`.

V D'autres opérations sur les listes

V.1 Tranches

Étant donnée une liste `L`, les syntaxes suivantes permettent d'obtenir une liste extraite de `L` appelée **tranche** :
- `L[a:b]` : sélectionne tous les éléments de la liste d'indice entre `a` et `b` (`b` est **exclus**, comme dans `range(a, b)`).
- `L[a:]` : sélectionne tous les éléments à partir de l'indice `a`.
- `L[:b]` : sélectionne tous les éléments du début jusqu'à l'indice `b` exclus.

Testons par exemple :

```
>>> L = ['oeufs', 'pain', 'riz', 'beurre', 'fromage', 'pommes']
>>> L[1:4]
['pain', 'riz', 'beurre']
>>> L[2:]
['riz', 'beurre', 'fromage', 'pommes']
```

Ces syntaxes sont compatibles avec les indices négatifs. Par exemple `L[:-1]` correspond à toute la liste sauf le dernier élément, et `L[-k:]` correspond aux `k` derniers éléments de la liste.

Enfin, un dernier paramètre optionnel `L[a:b:r]` permet de trancher en « sautant de `r` » au lieu de 1, pour par exemple prendre un terme sur deux. Avec un argument négatif, on part de la fin. Ainsi `L[::-1]` correspond exactement à la liste `L` rangée en ordre inverse (départ de la fin, jusqu'au début, en sautant de -1).

Ces opérations fonctionnent exactement de la même manière sur les chaines de caractères, si on les considère comme des listes de caractères individuels, illustrons-les encore :

```
>>> s = "mathématiques"
>>> len(s)
13
>>> s[0]
'm'
>>> s[-1]
's'
>>> s[:4]
'math'
>>> s[1:-1]
'athématique'
>>> s[::-1]
'seuqitaméhtam'
```

Exercice 5.12
Pouvez-vous prédire ce que renvoie la ligne suivante ?

```
>>> s = "J'aime la biologie, la chimie et les mathématiques"
>>> s[:7] + s[-17:]
```

V.2 Listes en compréhension

Une autre méthode pour créer des listes est d'utiliser la syntaxe **en compréhension**, qui est plus proche du langage mathématique. Par exemple ceci crée la liste des carrés des nombres de 1 à 10 :

```
>>> [i**2 for i in range(1, 11)]
[1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100]
```

Cela ressemble vraiment beaucoup beaucoup à $\{i^2 \,|\, 1 \leqslant i < 11\}$ n'est-ce pas ? On peut même y rajouter une condition, par exemple pour avoir seulement les carrés des nombres pairs :

```
>>> [i**2 for i in range(1, 11) if i%2 == 0]
[4, 16, 36, 64, 100]
```

Cette syntaxe a en fait de nombreux avantages. Au moins, c'est la méthode la plus simple pour créer une liste dont on aurait une « formule » directe pour `L[i]` (ce qui n'est pas le cas dans la partie III).

Exercice 5.13
Produire la liste suivante, en utilisant une syntaxe en compréhension :

```
[1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0]
```

Exercice 5.14
Écrire une fonction `rebours(n)` qui, en utilisant directement une liste en compréhension, renvoie la liste constituée de `[n, n-1, ..., 1, 0]` (compte à rebours à partir de n).

V.3 Itération sur les éléments

Pour parcourir une liste, il existe une autre syntaxe qui s'appelle **itérer sur les éléments**. La syntaxe `for x in L` fournit uns par uns les éléments de `L` dans la variable `x` :

```
L = ["oeufs", "pain", "riz", "beurre"]
for x in L:
    print(x)
```

produit tout simplement

```
oeufs
pain
riz
beurre
```

C'est souvent *plus simple* et *plus élégant*, même si en pratique itérer sur les indices fonctionne toujours.

L'itération sur les éléments fonctionne aussi sur les chaines de caractères, en fournissant les caractères uns par uns :

```
s = "BCPST"
for x in s:
    print(x)
```

produit la même chose que l'itération sur les indices

```
B
C
P
S
T
```

La boucle `for` en Python fait beaucoup plus de choses que répéter n fois et c'est une possibilité fort intéressante et subtile. On parle d'**objets itérables** pour désigner tous les objets qu'on peut mettre après un `for` et qui sont capables de fournir des éléments uns par uns. Dans le TP précédent nous avons brièvement parlé d'itération sur les éléments d'un tuple.

On peut même combiner cela dans les listes en compréhension. La syntaxe suivante prend une liste `L` et fabrique une liste `M` dont les éléments sont exactement les doubles de ceux de `L` :

```
M = [2*x for x in L]
```

La fonction `garde_positifs(L)` de la partie IV peut s'écrire plus simplement avec une seule ligne

```
P = [x for x in L if x >= 0]
```

Exercice 5.15 (*)
Reprendre les autres exercices de la partie IV en utilisant uniquement des listes en compréhension.

TP 6
Algorithmes sur les listes

À partir de ce TP nous n'apprenons pas de concepts nouveaux du langage Python lui-même. Tout le cours nécessaire a été accumulé dans les TP précédents et est résumé sur le cours distribué au début d'année.

On propose d'étudier un certain nombre de situations classiques sur les listes : compter les éléments, tester une propriété, chercher un élément. Pour certaines d'entre elles les fonctions existent déjà dans les bibliothèques de base de Python, ou s'obtiennent facilement à partir d'elles, mais **on s'interdit de les utiliser**. On travail donc essentiellement avec des boucles `for`, l'accès aux indices d'une liste, les conditions booléennes classiques. Les méthodes sont les mêmes pour traiter des listes ou bien des chaines de caractères.

Enfin ce TP vient avec un fichier pré-rempli à compléter. L'intérêt, en plus du gain de temps, est surtout que le fichier comprend de nombreux **tests**. Dans les exercices qui vont suivre, pour vérifier que sa fonction est correcte, il est nécessaire de la tester avec des valeurs pour lesquelles tout marche bien mais aussi avec des valeurs qui pourraient mettre en échec le programme. **Regarder attentivement les tests proposés** et **observer les résultats du programme** tout en **réfléchissant bien** !

I Compter

Une situation de base est de **compter** les éléments d'une liste vérifiant une certaine propriété. Pour cela il est nécessaire de déclarer une variable appelée **compteur** (en effet…) initialisée à 0, et qui augmente de 1 à chaque fois. Le modèle de base est la fonction suivante qui compte le nombre de termes positifs d'une liste de nombres :

```
def compte_positifs(L):
    c = 0
    for i in range(len(L)):
        if L[i] >= 0:
            c = c + 1
    return c
```

Remarquons que l'alignement des blocs d'instructions est crucial. Il indique que l'instruction `c = c + 1` est exécutée uniquement quand la condition juste au dessus `L[i] >= 0` est vérifiée, et c'est donc cela qui va être compté. L'instruction `return c`, elle, est exécutée à la toute fin après avoir parcouru *toute* la liste.

Si aucun terme de la liste n'est positif, alors l'incrémentation de `c` n'a jamais lieu et à la fin `c` vaut 0 comme au début, ce qui est cohérent.

Exercice 6.1
Écrire une fonction `compte(L, x)` qui prend en argument une liste `L` et un nombre `x` et compte combien de fois `x` apparait dans la liste `L`.

Exercice 6.2
Écrire une fonction `compte_voyelles(s)` qui prend en argument une chaine de caractères `s` et compte le nombre de voyelles (lettres parmi `a`, `e`, `i`, `o`, `u`, `y`) dans `s`.

La situation pour sommer les termes d'une liste n'est pas très différente. Ici il n'y a plus de variable compteur mais une **variable accumulatrice**.

Exercice 6.3
Écrire une fonction `somme(L)` qui calcule la somme de tous les termes de la liste `L`.

II Tester

Une autre situation courante est de vouloir vérifier si les termes d'une liste vérifient une certaine propriété. Par exemple on souhaite écrire une fonction prenant en argument une liste `L` et qui renvoie `True` si tous les éléments de `L` sont positifs (ou nuls), et `False` sinon.

Une seule fonction est correcte parmi les propositions ci-dessous.

```
def tous_positifs_1(L):
    for i in range(len(L)):
        if L[i] >= 0:
            return True
        else:
            return False
```

```
def tous_positifs_2(L):
    for i in range(len(L)):
        if L[i] >= 0:
            return True
    return False
```

```
def tous_positifs_3(L):
    for i in range(len(L)):
        if L[i] < 0:
            return False
        else:
            return True
```

```
def tous_positifs_4(L):
    for i in range(len(L)):
        if L[i] < 0:
            return False
    return True
```

Exercice 6.4
Laquelle des fonctions ci-dessus teste bien si tous les éléments de `L` sont positifs ? Observer le code, tester les exemples du fichier et **justifier précisément**.

Exercice 6.5
Écrire une fonction `binaire(m)` qui prend en argument une chaine de caractères `m`, et qui renvoie `True` si `m` est composée uniquement de caractères `"0"` ou `"1"`, et `False` sinon.

Exercice 6.6
Écrire une fonction `est_croissante(L)` qui renvoie `True` si la liste `L` est rangée par ordre croissant et `False` sinon.

À retenir

Quand elle est rencontrée, l'instruction `return` arrête la fonction, même dans une boucle. Mais si la propriété à tester dépend aussi de la suite de la liste, on ne peut pas se contenter de s'arrêter là, et on ne peut pas non plus dire « sinon, continuer à tester »… La bonne façon de faire est alors de **s'arrêter si la condition contraire est vérifiée**, et sinon, le `return True` se situe **à la fin et en dehors de la boucle** : si on est arrivé jusque là, c'est qu'on ne s'est pas arrêté avant, donc que la condition fausse n'a pas été rencontrée, donc que c'est vrai !

III Chercher

On souhaite maintenant écrire une fonction `cherche(L, x)` qui prend en argument une liste `L` et un objet `x` et cherche l'élément `x` dans la liste `L`. Encore une fois, il faut parcourir la liste ; le démarrage est donc nécessairement

```
def cherche(L, x):
    for i in range(len(L)):
        if ... :
    ... ... ...
    ... ... ...
```

mais ensuite… On fait les remarques suivantes :

1. On peut s'intéresser soit à l'élément lui-même, soit à son indice dans la liste. Ici, on veut son indice (la variable `i` telle que `L[i]` soit égal à `x`).
2. L'élément `x` peut apparaitre plusieurs fois dans la liste. Mais si on arrête la fonction **dès que** `x` est trouvé, alors on obtiendra l'indice de **la première** apparition de `x` dans la liste. Au contraire, si `x` n'apparait pas du tout alors il faut bien aller au bout de la liste pour le savoir…

3. Enfin, contrairement à la situation « compter », il n'y a pas de bonne valeur cohérente à renvoyer si `x` n'est pas dans la liste. On propose de renvoyer l'objet spécial `None` qui indique l'absence de valeur.

Exercice 6.7
Compléter la fonction ci-dessus pour que `cherche(L, x)` renvoie le premier indice de la liste où `x` apparait, et `None` s'il n'apparait pas.

Exercice 6.8
Écrire une fonction `premier_negatif(L)` qui renvoie le premier élément de `L` qui est strictement négatif (l'élément, pas son indice), et `None` s'il n'y a pas de tel élément.

Exercice 6.9
Écrire une fonction `indice_different(s, t)` qui prend en argument deux chaines de caractères, supposées de même longueur, et qui renvoie le premier indice auxquel les chaines diffèrent, et `None` si elles sont égales. Par exemple, les chaines `s = "ACGTGATAA"` et `t = "ACGTCATTA"` sont de même longueur 9 et diffèrent aux indices 4 (`s[4] = "G"` et `t[4] = "C"`) et 7 (`s[7] = "A"` et `t[7] = "T"`) donc la fonction doit renvoyer 4.

À retenir

Dans d'autres situations, on peut tout à fait quitter la fonction dès qu'on a trouvé ce qu'on voulait, c'est donc une bonne idée d'avoir une instruction `return` qui est bel et bien dans la boucle (et même, il ne sert à rien de continuer la boucle !) Éventuellement, en fin de fonction et en dehors de la boucle, on traite le cas où on n'a pas trouvé ce qu'on voulait.

IV D'autres exercices

Exercice 6.10
On suppose que la liste `L` ne contient que des nombres entre 0 et 9. Dans ce cas, on souhaite compter combien de fois apparait **chaque** chiffre, en renvoyant une liste `C` de longueur 10 telle que `C[x]` donne le nombre de fois où le chiffre `x` apparait dans `L`. Si on s'y prend bien, on peut le faire en parcourant la liste une seule fois, au lieu d'appeler 10 fois une fonction pour compter…

Écrire cette fonction, qu'on appellera `compte_tout(L)`.

Exercice 6.11
On considère qu'un mot de passe valide sera formé uniquement des caractères parmi ceux-ci :
`"abcdefghijklmnopqrstuvwxyz0123456789"`

1. Écrire une fonction `caractere_valide(x)` qui teste si `x` est un caractère valide ou non.
2. En déduire une fonction `motdepasse_valide(m)` qui teste si `m`, une chaine de caractères, représente un mot de passe valide.
3. Bonus : écrire une fonction `motdepasse_fort(m)` qui teste si `m` est valide et contient au moins une lettre et un chiffre.

   Le plus efficacement possible.

Exercice 6.12
Écrire une fonction `est_monotone(L)` qui renvoie `True` si la liste `L` est soit croissante soit décroissante, et `False` sinon.

Sans écrire séparément des fonctions annexes `est_croissante(L)` et `est_decroissante(L)`.

Exercice 6.13 (*)
On considère des listes constituées uniquement de nombres `0` et `1` et on souhaite compter le nombre blocs de `1` consécutifs. Par exemple pour

```
L = [0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1]
```

on compte 4 blocs de `1`, ayant pour tailles respectives 2, 3, 1, 2.

Écrire la fonction `compte_blocs(L)` qui prend en argument une telle liste et renvoie le nombre de blocs. Attention à ce qu'elle fonctionne correctement dans tous les cas, que les blocs soient calés au début de la liste ou à la fin ou pas du tout.

Exercice 6.14 (*)
Une **permutation de longueur n** est une liste de longueur n où chacun des nombres de 0 à $n-1$ apparait exactement une fois. Par exemple `[3, 1, 0, 2]` est bien une permutation de longueur 4.

1. Pourquoi suffit-il que chacun de ces nombres apparaisse *au moins* une fois ? Ou bien *au plus* une fois ?
2. Écrire une fonction `appartient(L, x)` qui renvoie `True` si le nombre `x` est présent dans la liste `L` et `False` sinon.
3. En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction `est_permutation(L)` qui renvoie `True` si `L` est bien une permutation, et `False` sinon.

Une autre possibilité plus directe est la suivante. Pour tester si la liste `L` est bien une permutation, on crée une liste de booléens `M` de même taille que `L`, et on parcourt une seule fois `L`, mais on « coche » les nombres qu'on a vus. Ainsi `M[x] = True` est à interpréter comme « `x` est bien présent dans `L` » alors que `M[x] = False` signifie que `x` n'a pas encore été rencontré.

4. En utilisant cette méthode, écrire une fonction `est_permutation_2(L)`.

Dans certains cas et pour des listes longues, on peut « faire le pari » que la liste ne sera pas une permutation. Un premier test serait par exemple de calculer la somme de tous les nombres de la liste : si ceci c'est pas exactement égal au résulat de $0+1+2+\cdots+(n-1)$ alors la liste *n'est pas* une permutation. Sinon, cela ne dispense pas de réaliser l'un des tests précédents.

5. Écrire cette fonction `est_permutation_3(L)`.

Pour ceux qui ont fini trop vite :

6. Écrire une fonction `permutations(n)` qui renvoie la liste de toutes les permutations de longeur n (une liste de listes !)

TP 7
Révisions et consolidation 1

Exercice 7.1 *Solide sur les bases*

1. Écrire une fonction `pH(x)` qui prend en argument un nombre x (on suppose que x est entre 0 et 14 et représente bien le potentiel hydrogène d'une solution) et affiche le mot « acide », « basique » ou « neutre ».

   Éventuellement, la fonction affiche « invalide » si x n'est pas dans $[0, 14]$.

2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Écrire des fonctions, indépendantes l'une de l'autre :

   (i) `u_suite(n)` : renvoie le terme u_n,

   (ii) `u_liste(n)` : renvoie la liste des n premiers termes de la suite.

3. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 3v_{n+1} + v_n$. Écrire des fonctions, indépendantes l'une de l'autre :

   (i) `v_suite(n)` : renvoie le terme v_n,

   (ii) `v_liste(n)` : renvoie la liste des n premiers termes de la suite.

4. Écrire une fonction `somme(n)` qui renvoie la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, c'est-à-dire $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$.

Exercice 7.2 *Suites*

La **suite de Tribonacci** est la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$$

avec les conditions initiales $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 1$.

Écrire séparément les fonctions (sans que l'une ne fasse appel à l'autre) :

1. `tribonacci(n)` : calcule le terme T_n.
2. `tribonacci_liste(n)` : renvoie la liste des n premiers termes de la suite.

Pour tester on pourra vérifier que les premiers termes de la suite sont

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T_n	0	1	1	2	4	7	13	24	44

Exercice 7.3 *Modélisation*

On représente un nombre complexe par une liste de longueur 2 formée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Par exemple le nombre complexe $z = 3 - 4i$ correspondra à la variable `z = [3, -4]`. Un nombre réel a est identifié avec la liste `[a, 0]`, et le nombre i à `[0, 1]`.

1. Quelle syntaxe permet d'obtenir la partie réelle du nombre représenté par la liste `z` ? Et la partie imaginaire ?
2. Écrire une fonction `somme(z, w)` qui prend en argument deux listes `z`, `w`, représentant des nombres complexes z, w, et qui renvoie une liste représentant la somme $z + w$.
3. Écrire une fonction `produit(z, w)` qui prend en argument deux listes `z`, `w`, représentant des nombres complexes z, w, et qui renvoie une liste représentant le produit de nombres complexes $z \times w$.
4. En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction `puissance(z, n)` qui prend en argument une liste `z` représentant un nombre complexe z, et un entier n (supposé positif), et renvoie une liste représentant le nombre complexe z^n.

   On pourra tester avec les puissances successives de $z = 1 + 2i$, qui sont

n	0	1	2	3	4	5	6
$(1+2i)^n$	1	$1+2i$	$-3+4i$	$-11-2i$	$-7-24i$	$41-38i$	$117+144i$

Exercice 7.4 *Compter*

On souhaite se donner un nombre réel $r \geqslant 0$ et compter le nombre de couples d'entiers $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n^2 + m^2 \leqslant r^2$. Ce sont les points à coordonnées entières situés à l'intérieur du cercle de rayon r.

1. Pourquoi peut-on supposer $-r \leqslant n \leqslant r$ et $-r \leqslant m \leqslant r$?
2. Écrire une fonction `compte_points(r)` qui prend en argument un nombre entier r supposé positif et qui compte le nombre de tels couples.
3. Modifier la fonction pour renvoyer non pas le nombre N de points mais le quotient N/r^2, et tester avec des valeurs de r de plus en plus grandes, par exemple 10, 100, 1000 (puis augmenter progressivement par multiples de 1000, sans dépasser 10 000). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 7.5 *Listes*

Dans ces questions, la fonction reçoit en argument une liste `L` et doit commencer par créer une liste `M` de la même taille.

1. (i) Écrire une fonction `somme(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie la somme de tous les éléments de `L`.

   (ii) Pour une liste `L` de nombres tous positifs, de sommme N, la *liste des pourcentages* est la liste `M` des pourcentages correspondant à chaque valeur : `M[i]` $= \frac{N}{100} \times$ `L[i]`.

   Écrire une fonction `pourcentages(L)` qui renvoie la liste des pourcentages de `L`.
2. Pour une liste `L`, la *liste miroir* est la liste contenant les mêmes éléments mais rangés dans l'ordre inverse. Écrire la fonction `miroir(L)` qui renvoie la liste miroir de `L`.
3. Pour une liste `L` de longueur n, la *liste des sommes cumulées* de `L` est la liste `C` de longueur n où `C[i]` est la somme de tous les termes de `L` d'indice inférieur à i. Par exemple la liste des sommes cumulées de `[2, 4, 3, 5, 3, 5]` est `[2, 6, 9, 14, 17, 22]`. Remarquez que le premier terme est toujours `L[0]` et le dernier est la somme de tous les termes de `L`.

   Écrire une fonction `sommes_cumul(L)` qui renvoie la liste des sommes cumulées.

Exercice 7.6 *Algorithmes sur les listes*

1. Une liste `L` est *symétrique* si elle est égale à sa liste miroir, par exemple `[4, 5, 2, 5, 4]` ou bien `[3, 7, 7, 3]`.

   Écrire une fonction `est_symétrique(L)` qui renvoie `True` si la liste `L` est symétrique et `False` sinon.
2. Une liste `L` est dite *pyramidale* si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes :
   - Elle est de longueur impaire,
   - Elle est symétrique,
   - Elle est strictement croissante sur sa première moitié (et donc automatiquement strictement décroissante sur sa deuxième moitié).

   C'est le cas par exemple de `[1, 3, 8, 12, 8, 3, 1]`.

   Écrire une fonction `est_pyramidale(L)` qui renvoie `True` si `L` est une liste pyramidale, et `False` sinon.

Exercice 7.7 (*) *Alphabet*

On donne la chaine de caractères suivante : `alphabet = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"`. Ainsi on considère que la lettre `a` est le caractère numéro 0 de l'alphabet, et `z` est le caractère numéro 25.

1. Écrire une fonction `numero(x)` qui prend en argument un caractère seul `x` (on suppose que c'est l'une des 26 lettres de l'alphabet ci-dessus : pas de majuscule, pas d'accents) et qui renvoie le numéro de `x` en tant que lettre de l'alphabet. Si `x` n'est pas une lettre de l'alphabet on pourra renvoyer l'objet spécial `None`.
2. Écrire une fonction `compte_lettres(s)` qui prend en argument une chaine de caractères `s` et qui renvoie une liste `C` de longueur 26, où `C[x]` indique combien de fois apparait la lettre numéro `x` dans la chaine `s`.

L'une des méthodes les plus anciennes pour coder un texte en un message secret s'appelle *codage de César*, utilisée effectivement par Jules César, et consiste à remplacer chaque lettre d'un texte par celle trois lettres plus loin dans l'alphabet. Ainsi `a` est remplacé par `d`, `b` est remplacé par `e`, etc, et `x` est remplacé par `a`, `y` par `b` et enfin `z` par `c`.

3. Écrire une fonction `code_caractere(x)` qui prend en argument un caractère `x` et qui renvoie le caractère codé par ce procédé.
4. Écrire une fonction `code(s)` qui prend en argument une chaine de caractères `s` et renvoie la chaine ainsi codée.

   On pourra pour cela passer par la création d'une *liste* des caractères codés. Après avoir créé une telle liste `L`, renvoyer non pas `L` mais `"".join(L)` qui colle tous les caractères en une seule chaine.

   On pourra dans un premier temps supposer que `s` contient seulement des lettres de l'alphabet parmi ces 26 là — mais on pourra lever cette restriction en ne « codant pas » les autres caractères (notamment les espaces).

TP 8
Tri

Dans ce TP nous nous intéressons au problème du tri des listes. Il s'agit tout simplement de se donner une liste de nombres et d'étudier différentes méthodes pour les ranger par ordre croissant, en échangeant des éléments entre eux. Par exemple, trier la liste `L = [3, 4, 3, 4, 1, 1, 9, 3]` doit donner `[1, 1, 3, 3, 3, 4, 4, 9]`.

I Préliminaires

Les fonctions de cette section ne seront pas utilisées tel quel par la suite. Il s'agit cependant d'un échauffement et de bases à bien comprendre.

Le but final est d'aboutir à une liste triée, ce qui est la même chose qu'une liste rangée par ordre croissant.

Exercice 8.1 *Révisions*
Écrire une fonction `est_croissante(L)` qui renvoie `True` si la liste `L` est bien rangée en ordre croissant, et `False` sinon.

Puis nous aurons besoin de diverses variantes pour obtenir le maximum d'une liste `L` — ou bien pour obtenir l'indice `i` tel que le maximum de `L` est `L[i]`. L'idée est de parcourir la liste, les éléments uns par uns dans l'ordre, en maintenant une variable M qui contient le maximum de la liste « jusque là ». Attention car le maximum d'une liste vide n'est pas défini, vraiment pas !

Exercice 8.2
Écrire une fonction `maximum(L)` qui renvoie le maximum de la liste `L`.

Il est fort intéressant de comparer le programme avec le théorème ci-dessous et surtout avec sa preuve.

Théorème. *Tout sous-ensemble fini et non-vide $A \subset \mathbb{R}$ admet un maximum.*

Démonstration. Démontrons par récurrence sur n la proposition $\mathcal{P}(n)$: « tout sous-ensemble fini à n éléments $A \subset \mathbb{R}$ admet un maximum ». Comme la partie A ne peut pas être vide, la récurrence porte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : pour $n = 1$, soit A une partie de $\mathbb{R}$ à un seul élément, alors on peut écrire $A = \{x_1\}$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ et x_1 est le maximum de A.
- Hérédité : soit $n \in N^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$ à $n+1$ éléments, écrivons $A = \{x_1, ..., x_n, x_{n+1}\}$. Formons la partie $B = \{x_1, ..., x_n\}$, c'est une partie de $\mathbb{R}$ non-vide à n éléments. On applique alors l'hypothèse de récurrence à B, qui admet donc un maximum M, qui est un des éléments parmi $x_1, ..., x_n$. Mais ensuite :
  - Ou bien $x_{n+1} \geqslant M$. Alors x_{n+1} est plus grand que lui-même et que tous les $x_1, ..., x_n$, donc x_{n+1} est le maximum de A.
  - Ou bien $x_{n+1} \leqslant M$, et donc M est plus grand que tous les $x_1, ..., x_n$ et aussi que x_{n+1} et donc M est le maximum de A.

  En conclusion la partie A admet bien un maximum, et ceci démontre $\mathcal{P}(n+1)$. □

Pour la suite il est important de comprendre qu'une fonction qui reçoit une liste en argument va modifier la liste, comme expliqué dans l'annexe § III. La fonction suivante n'est qu'un petit échauffement.

Exercice 8.3
Écrire une fonction `echange(L, i, j)` qui échange les éléments de `L` d'indices `i` et `j`.

II Les algorithmes de tri

Nous démarrons maintenant les algorithmes de tri. Le but est, à chaque fois, d'écrire une fonction qui prend comme argument une liste de nombres de longueur n et trie la liste par ordre croissant. La fonction utilise diverses

comparaisons entre des éléments d'indices `i` et `j` et éventuellement les échange, et à la fin la liste doit être triée. En répétant les comparaisons et les opérations plusieurs fois, dans une boucle voire une double boucle.

On n'utilise donc pas les fonctions Python pour insérer ou supprimer des éléments en milieu de liste ainsi que, évidemment, les fonctions déjà prêtes de tri. On n'a même pas besoin de `append` et de `pop`, ni des tranches. C'est un tri « sur place ». Si nous avions à trier des livres sur une étagère, cela signifie que nous pouvons uniquement retirer deux livres et les échanger de place, mais que nous ne pouvons pas sortir tous les livres puis les reposer dans l'ordre, ni pousser d'un coup tout un étage pour le décaler.

Il est encouragé de rajouter des instructions `print(L)` dans les boucles, pour voir la liste évoluer au fur et à mesure du tri.

II.1 Tri à bulles

C'est le plus simple des tris à programmer. L'algorithme du tri à bulles se décrit ainsi :

1. On parcourt la liste, tout simplement, dans l'ordre.
2. Si deux éléments **consécutifs** ne sont pas rangés dans l'ordre croissant, on les échange.
3. … On répète ce processus n fois (en fait $n-1$ fois suffisent : pourquoi ?) en repartant à chaque fois du tout début de la liste.

L'idée est que les plus grands éléments remontent peu à peu à la fin de la liste, comme des bulles qui remontent à la surface de l'eau.

Exercice 8.4
Écrire la fonction `tri_bulle(L)`.

II.2 Tri par sélection

Il s'agit du deuxième plus simple des tris, et il est important d'avoir bien compris la fonction `maximum`.

1. On cherche **l'indice** du minimum de `L`, et par un échange on place le minimum à l'indice 0.
2. Puis on cherche l'indice du minimum de la liste, à partir de l'indice 1 (ce sera donc le deuxième plus petit), et de même par un échange on le place à l'indice 1.
3. On continue ce procédé jusqu'à arriver à la fin de la liste.

Ainsi, on **sélectionne** directement les éléments, uns par uns, pour les mettre à leur place, en partant du plus petit.

Exercice 8.5
Écrire la fonction `tri_selection(L)`.

II.3 Tri par insertion

C'est celui qu'on fait le plus naturellement, par exemple quand on trie un jeu de cartes, en **insérant** uns par uns les éléments chacun à leur place. Cependant, malgré le nom, nous écrivons cette fonction sans utiliser des insertions dans une liste, mais chaque nouvel élément rencontré sera amené à sa place par une suite d'échanges vers sa gauche.

L'algorithme peut donc se décrire ainsi :

1. On va répéter n fois l'insertion. Lors du i-ème passage, les i premiers éléments de la liste (ceux d'indice entre 0 et $i-1$) seront triés, et on s'intéresse à l'élément `x` d'indice i (celui qui vient juste après).
2. On insère alors `x` à sa place de telle façon à ce que les $i+1$ premiers éléments de la liste soient triés.
3. Pour cela, on échange successivement `x` avec l'élément qui est immédiatement avant lui, tant que c'est `x` qui est le plus petit des deux. Sinon, on est arrivé au point où `x` est bien inséré à sa place. Il s'agit donc d'une boucle descendante, à partir de l'indice i de `x`.

Exercice 8.6
Écrire la fonction `tri_insertion(L)`.

II.4 Tri stupide

Étudions ce tri pour s'amuser uniquement, car il est totalement inefficace. Le tri stupide fonctionne ainsi :

1. On choisit deux indices de la liste au hasard i et j.
2. Si les éléments d'indices i et j ne sont pas rangés dans l'ordre croissant, alors on les échange.
3. On répète *tant que* la liste n'est pas triée.

Pour choisir les indices au hasard, on a besoin de la bibliothèque `random` et de sa fonction `randint(a, b)` — quoique, ici `randrange(n)` est plus pertinent, qui donne un nombre au hasard tout comme `randint` mais avec une syntaxe similaire à `range`. Ainsi `randrange(n)`, aussi `randrange(0, n)`, est la même chose que `randint(0, n-1)`.

Exercice 8.7
Écrire la fonction `tri_stupide(L)`.

Observer aussi comme la fonction est nettement de plus en plus lente quand la longueur de la liste augmente, à un point où elle ne se termine même plus en un temps raisonnable. Quand la liste est très grande et presque triée, il devient très improbable de tomber pile sur deux éléments restant à échanger, et la boucle continue de nombreuses fois en attendant.

II.5 Tri par comptage

Il ne s'agit pas d'un tri au même sens que les précédents, mais c'est une technique bien utile.

On suppose qu'on a une liste `L` contenant **uniquement des nombres entiers** entre 0 et un certain entier N (au sens large, bornes incluses). Au lieu de trier directement, nous allons d'abord compter combien de fois apparait chaque nombre, puis nous allons reconstruire la liste. Après coup, on n'a pas besoin de se donner N car il s'agit du maximum de la liste.

Exercice 8.8
1. Écrire la fonction `compte(L, N)` qui prend en argument une liste `L` et un entier `N`, en supposant que les éléments x de `L` vérifient tous $0 \leqslant x \leqslant N$, et qui renvoie une liste `C` où `C[x]` est le nombre d'éléments de `L` qui sont égaux à `x`.
2. En déduire une fonction `tri_comptage(L)` qui utilise la fonction précédente et reconstruit une liste `M` qui contient les même éléments que `L` mais triée.

Cette méthode est notamment intéressante pour calculer la médiane d'une liste. Définissons la **médiane** d'une liste `L` comme le *plus petit* élément m de la liste tel qu'*au moins la moitié* des éléments de `L` soient *inférieurs ou égaux* à m. Ces précisions sont subtiles mais permettent d'avoir une médiane bien définie, que le nombre d'éléments soit pair ou non. Remarquons que lorsque la liste `L` est déjà triée, la médiane est immédiate à trouver… Remarquons aussi que la somme des éléments de `C` est égal à la longueur de `L`.

Exercice 8.9
Écrire la fonction `mediane(L)` qui calcule la médiane de la liste `L`, avec la définition ci-dessus :
1. Une première fois en triant la liste.
2. Une deuxième fois en utilisant `compte` mais sans trier la liste.

III Annexe : le problème des listes et des références

Il est important d'être conscient du problème suivant lorsqu'on manipule des listes. Comparons les trois morceaux de programmes :

```
>>> x = 3
>>> y = x
>>> x = 12
>>> print(y)
3
```

et

```
>>> L = [1, 3, 5]
>>> M = L
>>> L[0] = 12
>>> print(M)
[12, 3, 5]
```

et aussi

```
>>> s = "Bonjour"
>>> t = s
>>> s[0] = "b"
TypeError: 'str' object does not support item assignment
```

Que se passe-t-il ?

1. Dans le premier cas, les variables de type `int` **contiennent** une valeur, et lors de l'affectation `y = x` la valeur de `x` est **copiée** dans `y`. Une modification ultérieure de `x` ne modifiera en rien `y`.
2. Dans le deuxième cas, lors de l'affectation `M = L`, ce n'est pas toute la liste qui est copiée mais un « moyen d'accéder à la liste » qu'on appellera une **référence** à `L`. Les noms de variables `L` et `M` sont donc des références à la **même** liste en mémoire et toute modification de l'une affecte l'autre. Recopier une liste en mémoire peut être une opération coûteuse car la liste peut contenir des milliers d'éléments, et donc il faut éviter de la recopier inutilement !
3. Enfin dans le troisième cas les chaines de caractères sont des objets **immuables** que l'on ne peut de toute façon pas modifier. Cela fait donc peu de différence de savoir si deux variables sont des références à la même chaine ou bien deux chaines différentes.

Ce phénomène se produit aussi lorsqu'on passe une liste en argument à une fonction :

```
def f(L):
    L[0] = 12
```

puis

```
>>> L = [1, 3, 5]
>>> f(L)
>>> print(L)
[12, 3, 5]
```

Cela peut être souhaité ou bien peut être embêtant. Les fonctions `append` et `pop` vont aussi modifier la liste passée en argument :

```
def f(L):
    L.append(12)
```

puis

```
>>> L = [1, 3, 5]
>>> f(L)
>>> print(L)
[1, 3, 5, 12]
```

On parle aussi d'**effets de bords** — la fonction a des effets en dehors de la manipulation de ses variables locales.

Le mot-clé `is` permet de savoir si deux variables sont des références au même objet Python.

```
>>> L = [1, 3, 5]
>>> M = L
>>> M == L
True
>>> M is L
True
```

mais

```
>>> L = [1, 3, 5]
>>> M = [1, 3, 5]
>>> M == L
True
>>> M is L
False
```

Dans ce dernier cas les listes `L` et `M` sont **structurellement égales** (elles contiennent les mêmes éléments et sont donc des objets égaux au sens mathématique usuel du terme) mais ne sont pas des références à un même objet liste. Ainsi une modification de l'une ne va pas affecter l'autre.

Il est toujours possible d'obtenir une copie « fraiche » d'une liste, qui ne soit pas une référence mais contienne les même éléments, avec la méthode `L.copy()`.

```
>>> L = [1, 3, 5]
>>> M = L.copy()
>>> M
[1, 3, 5]
>>> M is L
False
```

Encore une fois, ce `False` nous indique qu'on peut sereinement modifier soit `L` soit `M` sans affecter l'autre.

Retenons que :
- Les opérations `+`, `*`, et les tranches, créent à chaque fois des listes nouvelles en copiant les éléments.
- Les affectations `L[i] = ...`, et les opérations `append` et `pop`, modifient directement les listes, même à travers des références. Attention aux effets de bords quand on les utilise sur des listes passées en argument à des fonctions !
- L'opération `M = L.copy()` permet de créer une nouvelle liste `M`, et non pas une référence à `L`, en copiant les éléments.

TP 9
Recherche dans un texte

Le but de ce TP est d'abord d'étudier des méthodes pour rechercher un mot dans un texte.

Dans tout le TP, un « texte » désigne une chaine de caractères quelconque qu'on notera `s`. Un « mot » désigne simplement une sous-chaine de caractères, c'est-à-dire une chaine `m` telle que les caractères consécutifs de `m` se retrouvent tels quels consécutivement dans `s`.

Par exemple dans `s = "abracadabra"` on trouve les mots `"cad"` qui apparait à partir de la position 4 (la lettre `c` est en position 4 dans `s`, qui est numérotée à partir de 0) ou bien `"abra"` qui apparait deux fois, à partir des positions 0 ainsi que 7.

Ainsi les programmes s'appliquent à rechercher un mot dans un texte en français (au sens habituel) mais aussi à rechercher un motif dans une séquence ADN. Par exemple dans la séquence `s = "TTAATGCAATAAC"` on peut vouloir rechercher le motif `"AAT"`, qui apparait deux fois, ou `"ATT"` qui n'apparait pas.

Le TP vient avec un fichier joint `livre.txt` qui contient l'intégralité du livre absolument passionnant *Le Rouge et le Noir* de Stendhal, permettant de faire des tests pour trouver des vrais mots. Ce livre étant tombé dans le « domaine public », chacun a le droit de le télécharger et de l'utiliser.

I L'algorithme simple

L'algorithme le plus simple que nous étudions consiste en une sorte de « fenêtre glissante » qui tente de faire correspondre le mot `m` à chacune des positions possibles dans le texte `s`.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T	T	A	A	T	G	C	A	A	T	A	A	C
A	A	T										
	A	A	T									
		A	A	T								
			A	A	T							
				A	A	T						
					A	A	T					
						A	A	T				
							A	A	T			
								A	A	T		
									A	A	T	
										A	A	T

Les fonctions suivantes ne seront pas utilisées telles quelles, mais constituent des révisions.

Exercice 9.1
Un pré-requis indispensable est de savoir chercher un caractère tout seul.

1. Écrire une fonction `cherche_caractere(s, x)` qui prend en argument une chaine de caractères `s` et un caractère seul `x`, affiche tous les indices auxquels le caractère `x` apparait dans `s`.
2. Améliorer la fonction pour écrire la fonction `compte_caractere(s, x)` qui renvoie le nombre d'apparitions du caractère `x` dans `s`.

On se donne maintenant une chaine de caractère `s` et un mot `m` à chercher dedans. Remarquons déjà que la longueur de `m` est inférieure à celle de `s`, sinon le mot ne peut pas apparaitre… On souhaite écrire une fonction `le_mot_est_ici(s, m, i)` qui prend en argument un indice `i` de la chaine `s`, et qui va renvoyer `True` si le mot `m` est bien présent dans `s` à partir de cet indice, c'est à dire si `m[0]` est égal à `s[i]`, et `m[1]` est égal à `s[i+1]`, etc. Dans notre exemple ci-dessus lors de la recherche de `m = "AAT"` dans `s = "TTAATGCAATAAC"`, le mot est présent aux positions 2 ainsi que 7, donc `le_mot_est_ici(s, m, i)` doit renvoyer `True` pour $i = 2$ et pour $i = 7$ et `False` sinon. Attention à ne pas se mélanger dans les indices !

Exercice 9.2
Tout d'abord il y a une contrainte entre les longueurs des chaines de caractères pour laquelle nous sommes sûrs que le mot n'est pas ici ! Par exemple, un mot `m` de deux lettres ne peut pas démarrer sur le dernier indice de `s`. Un mot de trois lettres peut-il démarrer sur la dernière ou l'avant-dernière lettre de `s` ? Pouvez-vous donner la relation exacte entre les longueurs n de `s`, p de `m` et l'indice i ?

Exercice 9.3
Écrire la fonction `le_mot_est_ici(s, m, i)`.

Cela permet de répondre, déjà, à la question de recherche de mot.

Exercice 9.4
1. En utilisant la fonction précédente, écrire une fonction `cherche_mot(s, m)` qui cherche à tous les indices possibles `i` de `s` si le mot `m` démarre bien à cet indice. La fonction affiche les indices `i` où on trouve le mot.
2. Puis écrire une fonction `compte_mot(s, m)` qui compte combien de fois le mot apparait.

Une variante intéressant est aussi d'afficher le mot trouvé *et un peu plus*, par exemple les caractères précédents et suivants. À cette fin et pour les parties suivantes, on rappelle les syntaxes de tranche : `s[a:b]` sélectionne le mot extrait entre les indices `a` et `b` de la chaine de caractères `s`, `s[a:]` sélectionne le mot extrait à partir de l'indice `a` et `m[:b]` le mot jusqu'à l'indice `b` (exclus). Dans la fonction `cherche_mot(m)` on propose la syntaxe (où `i` est l'indice où le mot est trouvé, et `p` est la longueur de `m`) :

```
print(s[i-30:i+p+30].replace("\n", " "))
```

Le `"\n"` est un **caractère de saut de ligne** (*newline* en anglais), c'est un caractère à part entière d'une chaine de caractère ou d'un fichier texte (tout comme les lettres, les espaces et la ponctuation) dont le but est d'indiquer un saut de ligne. Le fichier joint contient de nombreux sauts de lignes qui coupent les phrases, ce qui est un peu ennuyeux pour notre programme.

II Avec des erreurs

On suppose maintenant que les mots peuvent contenir des erreurs d'orthographe, ou des simples variantes.

Cela rend la recherche nettement plus compliquée. Étant donnée un mot `s`, on peut considérer qu'un autre mot `t` est à peu près égal à `s` si les deux diffèrent seulement sur une lettre, ou sur deux (ce qui suppose qu'ils ont même longueur), ou bien si l'un contient juste une lettre de plus que l'autre (insérée à un endroit quelconque), ou plusieurs, ou un mélange d'insertions et de substitutions.

On ne s'en sortira pas facilement si on ne suppose pas que les deux mots ont la même longueur et que les erreurs ne peuvent être qu'alignées . Par exemple les mots PYTHON et PATRON sont assez proches car seules les lettres Y avec A, et H avec R, doivent être échangées pour passer du premier au second ; mais avec PIETON l'écart porte sur trois lettres (et non pas deux) car le T n'est plus à la même place.

Définition. La **distance de Hamming** entre deux mots `s` et `t` **supposés de même longueur** est le nombre de lettres qui diffèrent à la même place, c'est à dire le nombre d'indices `i` tels que `s[i]` $\neq$ `t[i]`.

Exercice 9.5
Écrire une fonction `distance(s, t)` qui calcule la distance de Hamming entre les deux mots `s` et `t`, supposés de même longueur (on pourra utiliser `assert` pour vérifier qu'ils le sont bien).

Pour rechercher un mot avec d'éventuelles erreurs, il est alors nécessaire de se fixer un seuil de tolérance auquel on considère qu'il s'agit du même mot : la distance de Hamming doit-elle être inférieure à 1 (au plus une lettre est autorisée à différer), ou bien 2, ou plus (on risque alors de trouver des mots franchement différents) ?

Exercice 9.6

1. Similairement à la fonction `le_mot_est_ici`, on doit cette fois écrire une fonction`le_mot_est_a_peu_pres_ici`, que nous abrégerons `lmeappi(s, m, i, seuil)`. Elle prend en argument, en plus de la chaine `s`, du mot à chercher `m`, et d'un indice `i` où démarrer la recherche, un seuil de tolérance qui est un nombre entier positif. Elle renvoie `True` si le mot dans `s` à partir de l'indice `i` est à une distance de `m` qui est inférieure ou égale au seuil, et `False` sinon. Écrire cette fonction.
2. En déduire une fonction `cherche_mot_erreurs(s, m, seuil)` qui cherche le mot `m` dans `s` avec le seuil de tolérance donné. Cette fois-ci, on aimerait vraiment que quand la fonction trouve à peu près le mot, elle affiche le mot trouvé (puisque ce ne sera pas exactement `m` mais des variantes), éventuellement avec quelques caractères avant et après comme précédemment.

III L'algorithme de Knuth-Morris-Pratt (KMP) (d'après concours TB 2022)

Nous proposons d'étudier une méthode qui peut être sensiblement plus efficace pour rechercher un mot dans un texte, si on compte en terme de nombre de comparaisons de caractères à effectuer. L'idée est qu'on n'est pas obligé de recommencer à chaque fois avec la fonction `le_mot_est_ici` à l'indice $i+1$ après avoir testé à l'indice i : on peut se servir de l'information du nombre de comparaisons vérifiées par `le_mot_est_ici` pour décaler de plus d'un cran la prochaine recherche.

III.1 Quelques exemples

Exemple 1 Supposons que le mot à chercher `m` est constitué de lettres toutes différentes, par exemple on cherche le mot `m = "AGCT"` dans `s = "AGTAGCAGCT"`. Alors si la fonction `le_mot_est_ici(s, m, i)` échoue (renvoie `False`), on peut directement continuer à chercher dans `s` juste après le dernier échec de comparaison.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	G	T	A	G	C	A	G	C	T
A	G	C	T						
		A	G	C	T				
			A	G	C	T			
						A	G	C	T

Ici on teste d'abord à partir de la position 0 (cela échoue sur le C de `m`), puis directement 2 (ce qui échoue directement sur le A) puis 3 (ce qui échoue à cause du T de `m`) puis enfin directement à 6, où on trouve le mot.

On voit que la « fenêtre glissante » peut avancer parfois plus vite que dans l'algorithme naïf.

Exemple 2 La situation est moins simple quand une partie du mot à chercher se « répète dans lui-même ». Par exemple si on cherche `m = "ACAT"` dans `s = "ACACATAG"` :

0	1	2	3	4	5	6	7
A	C	A	C	A	T	A	G
A	C	A	T				
		A	C	A	T		
				A	C	A	T

On teste d'abord si le mot est en position 0, ce qui échoue à cause de son T (la comparaison en position 3 dans `s`) ; mais on ne va pas sauter directement à position 3 ou après car le mot démarre en fait à la position 2. En fait, une fois qu'on sait déjà que les lettres A coïncident à la position 2, on peut *poursuivre* les comparaisons à partir de la position 3 pour essayer de savoir si le mot démarre à la position 2. À la fin, le fait que la coïncidence ait lieu prouve aussi que les lettre A coïncident bien à la position 4, et donc qu'on peut tenter de poursuivre les comparaisons à partir de la position 5 pour savoir si le mot démarre à la position 4 ; ce n'est ici pas le cas.

Exemple 3 Pour la recherche du mot `m = "ATCGATG"` à l'intérieur de `s = "ATCGATCGATCGATG"`, on obtient les sauts suivants, ne trouvant pas le mot aux positions 0 ni 4, mais 8 :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	T	C	G	A	T	C	G	A	T	C	G	A	T	G
A	T	C	G	A	T	G								
				A	T	C	G	A	T	G				
								A	T	C	G	A	T	G

III.2 Les notions

L'idée de l'algorithme est d'abord de construire, étant donné le mot `m`, un « plan » qui puisse nous dire de combien d'indices sauter après avoir échoué à tester si le mot était à l'indice `i` dans `s`, en fonction des caractères de `m` qui ont bien été comparés et de la connaissance de « comment les caractères comparés au début du mot se retrouvent à la fin du même mot ».

Dans la problématique de recherche d'une séquence ADN, c'est surtout la chaine `s` qui est très grande, et le mot `m` peut contenir beaucoup de répétitions dans lui-même, ainsi ce n'est pas une contrainte lourde de faire des pré-calculs concernant le mot `m` seul pour pouvoir ensuite sauter plus rapidement dans `s`.

Mais d'abord cela nécessite quelques définitions.

Définition. Étant donné un mot `m` :

1. Un **préfixe** de `m` est un sous-mot (c'est à dire, une suite de lettres consécutives de `m`) démarrant au début de `m`.

   Par exemple `"GCC"` est un préfixe de `"GCCATC"`.

2. Un **suffixe** de `m` est un sous-mot terminant à la fin de `m`.

   Par exemple `"ATC"` est un suffixe de `"GCCATC"`.

3. On convient que la chaine vide `""` est à la fois un préfixe, et un suffixe, de n'importe quel mot.

4. Le **bord** du mot `m` est le plus grand sous-mot (différent de `m` tout entier) qui est à la fois un préfixe et un suffixe.

   Par exemple :
   - `"AGT"` est le bord de `"AGTCGAGT"`,
   - La chaine vide `""` est le bord de `"AGTCGACTC"`,
   - `"TTT"` est le bord de `"TTTGCCTTT"`, alors que `"TT"` ne l'est pas (c'est bien un préfixe et un suffixe mais il n'est pas le plus grand possible).

Exercice 9.7

1. Écrire une fonction `est_bord(m, k)` qui renvoie `True` si les k premiers caractères du mot `m` sont aussi les k derniers — ainsi le bord de `m` est au moins de longueur k.

   Attention à tous les indices manipulés et aux longueurs !

2. Écrire la fonction `longueur_bord(m)` qui renvoie la longueur du bord de `m`, en cherchant le plus grand k tel que la fonction précédente renvoie `True`.

   Attention, elle peut très bien renvoyer `False` pour une valeur de k mais `True` pour des valeurs plus grandes ! Par exemple dans `m = "AGTCGAGT"` la fonction précédente renvoie `True` seulement pour $k = 3$. Mais elle renvoie évidemment `True` pour $k = 0$. Il faut donc garder en mémoire le plus grand k qu'on a rencontré pour lequel on a obtenu `True`.

3. En déduire une fonction `longueurs_bords_prefixes(m)` qui prend en argument une chaîne de caractères `m` et qui renvoie la liste `B` des longueurs du bord de chaque préfixe de `m`. Ainsi pour tout indice `j`, `B[j]` sera la longueur du bord du préfixe formé des `j + 1` premiers caractères de `m`, c'est à dire de `m[:j+1]`.

   Par exemple, l'appel `longueurs_bords_prefixes("AATGAATC")` devra renvoyer la liste `[0, 1, 0, 0, 1, 2, 3, 0]`. En effet :
   - `""` est le bord de la chaine `"A"`,

- `"A"` est le bord de la chaine `"AA"`,
- `""` est le bord des chaines `"AAT"` et aussi `"AATG"`,
- `"A"` est le bord de la chaine `"AATGA"`,
- `"AA"` est le bord de la chaine `"AATGAA"`,
- `"AAT"` est le bord de la chaine `"AATGAAT"`,
- `""` est le bord de la chaine `"AATGAATC"`.

III.3 L'algorithme

L'algorithme KMP fonctionne ainsi :

1. On se donne une chaine `s` et un mot `m` à chercher, et on calcule la liste des longueurs des bords des préfixes `B` ci-dessus.

2. On initialise une variable `i` à 0, c'est un indice où chercher le mot dans `s`, et on démarre une boucle sur `i`. On préférera une boucle `while` plutôt que `for`, ce qui permet de faire varier les tailles du saut à l'indice suivant.

3. On cherche le plus petit indice `j`, à partir de 0 et s'il existe, pour lequel `s[i+j]` $\neq$ `m[j]`.
   - S'il n'y en a pas, c'est que le mot `m` se trouve bien ici en démarrant à l'indice `i`.
   - Si `j = 0`, c'est que la comparaison rate sur la première lettre. On passe alors simplement à l'indice `i+1`.
   - En général, on saute à l'indice `i + j - B[j-1]` de `s`, mais en démarrant la comparaison avec `m` à partir de son indice `B[j-1]`.

Exercice 9.8
Compléter le programme pour écrire la fonction `cherche_KMP(s, m)`.

Pour observer le fonctionnement du programme, on pourra rajouter des instructions `print` pour afficher les caractères comparés et le nombre de sauts effectués.

Exercice 9.9
Appliquer l'algorithme à la main sur les exemples de la partie III.1, et comparer avec les testes du programme.

TP 10
Récursivité

La récursivité n'est pas un nouveau concept du langage Python ni même une nouvelle fonction, mais une technique générale de programmation. Une fonction écrite en Python est dite **récursive** quand, dans le corps de la fonction, elle fait appel à… elle-même. Cela correspond directement à la notion mathématique de récurrence.

I Exemples simples

Nous avons appris à calculer les puissances de 2 avec une simple boucle `for`. Cependant la définition mathématique la plus naturelle du nombre 2^n est par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 \times 2^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Il est possible d'écrire un programme Python qui fait exactement cela !

```
def puissance2(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return 2 * puissance2(n-1)
```

Pour comprendre bien ce qui se passe dans ce programme, on rajoute des `print()` :

```
def puissance2(n):
    print("Appel avec n =", n)
    if n == 0:
        print("Fini")
        return 1
    else:
        p = 2 * puissance2(n-1)
        print("Retour avec", p)
        return p
```

Tester la fonction avec des petites valeurs de n.

Ce qu'on observe s'appelle la **pile d'appels**, voir l'annexe IV. La fonction est appelée elle-même successivement avec des valeurs de n de plus en plus petites, puis les retours se font dans l'ordre inverse des appels, comme si à chaque appel on avait écrit l'endroit exact où on en était, afin de s'en souvenir, en empilant, et qu'à la fin on peut lire la pile en commençant par le dessus.

Exercice 10.1
Une fonction célèbre est écrite ici de façon récursive. Quelle est la fonction `f` ?

```
def f(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * f(n-1)
```

Dans la suite de ce chapitre, quand on demande écrire une fonction récursive il faut que la fonction fasse appel à elle-même au lieu d'utiliser une boucle. Nous verrons qu'il est nécessaire d'avoir d'abord au brouillon une bonne formulation récursive du problème, qu'il est ensuite relativement aisé de traduire en fonction Python.

Exercice 10.2
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3u_{n-1} + 2$. Écrire une fonction récursive `suite(n)` qui renvoie le terme u_n.

Exercice 10.3
Soit la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Qu'est-ce que S_1 ? Quelle est la relation entre S_n et S_{n-1} ?
2. Écrire une fonction récursive `somme_cubes(n)` qui prend en argument un nombre entier `n` et qui calcule S_n.

II Quelques phénomènes

À retenir

Pour écrire une bonne fonction récursive, il est impératif d'avoir d'abord au brouillon une bonne formulation mathématique du problème. Similairement au raisonnement par récurrence, une fonction récursive contient toujours :

- Une condition initiale (en général le cas $n = 0$ ou $n = 1$), où la fonction renvoie directement une valeur,
- Un appel récursif (la fonction `f(n)` s'appelle elle-même avec des valeurs plus petites, typiquement $n - 1$ ou $n/2$).

La fonction bien écrite au brouillon peut ensuite se traduire facilement en Python.

Exercice 10.4 *Fibonacci, le retour du retour*
On rappelle que la suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

1. Traduire cette définition en une fonction récursive `fibonacci(n)`.
2. Tester la fonction `fibonacci(n)` en prenant des valeurs de `n` de plus en plus grandes, pas à pas, surtout en augmentant doucement à partir d'environ 30 (ne pas tester directement plus de 35). Que se passe-t-il ?
3. Pour comprendre ce qui se passe, insérer au tout début de la fonction la ligne

```
print("Appel avec n =", n)
```

et ré-essayer, cette fois d'abord avec des tout petits nombres, comme 4, 5, 6. Expliquer.

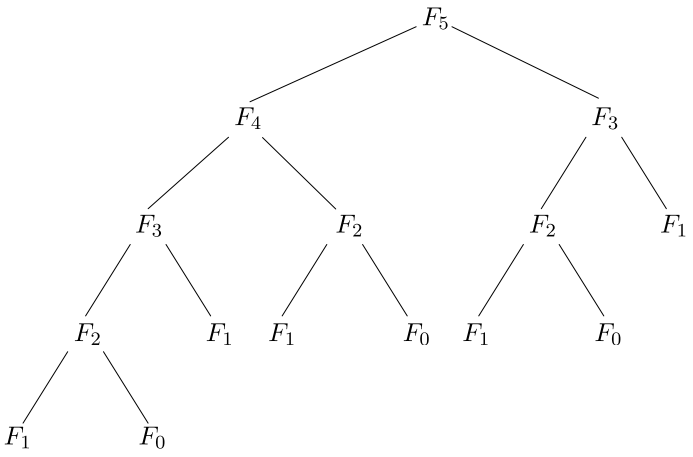


Figure 1. – Arbre des appels pour `fibonacci(5)`.

Exercice 10.5 *Exponentiation rapide*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Remarquons que les puissances a^n vérifient la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (laissons de côté $a^0 = 1$) :

$$a^n = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ \left(a^{n/2}\right)^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ a \times a^{n-1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par exemple pour calculer a^5 cela revient à écrire $a^5 = a \times a^4$ puis $a^4 = \left(a^2\right)^2$, ainsi $a^5 = a \times \left(a^2\right)^2$ et on peut vérifier que cela nécessite en tout de calculer 3 multiplications, ce qui est mieux que d'écrire $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$ qui en nécessite 4. Pour calculer a^6 cela revient à écrire $a^6 = \left(a^3\right)^2 = \left(a \times a^2\right)^2$ et on compte en tout 3 multiplications aussi, au lieu de 5 avec la méthode naïve.

1. Avec la même méthode, combien de multiplications sont nécessaires pour calculer les nombres suivants ?

$$a^{16} \qquad a^{15} \qquad a^{24}$$

2. Écrire une fonction récursive `puissance_rapide(a, n)` qui prend en argument un entier `a` et un entier `n` (celui-ci est supposé strictement positif) et qui calcule a^n selon ce procédé.

On rappelle que, comme les exposants sont entiers, on utilise le reste dans la division euclidienne `n % 2` pour tester la parité et on utilise le quotient `n // 2`.

Exercice 10.6

On rappelle la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux, ré-écrite en fonction de $n-1$ et $k-1$ et valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

1. Écrire une fonction récursive `binome(n, k)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

   Attention au cas d'initialisation !

2. Tester la fonction ci-dessus avec des valeurs de n et de k de plus en plus grandes en augmentant lentement, par exemple n autour de à et k petit ou à la moitié de n. Encore une fois qu'observe-t-on ?

3. Pour corriger ce problème, une méthode est d'écrire une fonction `binome_liste(n)` qui renvoie une liste de longueur $n+1$ correspondant à **toute** la ligne du triangle de Pascal des coefficients $\binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Par exemple `binome_liste(3)` doit renvoyer `[1, 3, 3, 1]`.

   Écrire cette fonction, de façon récursive.

À retenir

La récursivité est une **méthode de programmation**.

- Elle a l'avantage d'être parfois plus proche du langage mathématique et plus simple à programmer,
- Mais elle peut donner lieu à des programmes moins efficaces, notamment à cause du phénomène d'arbre des appels comme pour `fibonacci`.

Dans les sujets écrits, il peut être précisé « écrire une fonction récursive qui… » ou bien « écrire une fonction itérative (c'est à dire, non-récursive) qui… ». Si rien n'est précisé, alors vous êtes libre de choisir la méthode avec laquelle vous vous sentez le plus à l'aise.

III Problèmes

Exercice 10.7 (*) *Ordre lexicographique*
On souhaite écrire une fonction qui compare deux mots selon l'ordre du dictionnaire, appelé **ordre lexicographique**. Cela signifie que le mot s vient avant le mot t si :

- La première lettre de s vient avant la première lettre de t,
- Ou bien les premières lettres sont les mêmes, et la deuxième lettre de s vient avant la deuxième lettre de t,
- etc,
- Éventuellement on arrive à la situation ou les deux mots sont égaux ; ou bien ou l'un est plus court que l'autre et ils sont égaux sur le plus court, c'est à dire que l'un est un préfixe de l'autre, et c'est le plus court des deux qui vient avant dans le dictionnaire (par exemple « TRAVAIL » vient avant « TRAVAILLER »).

La fonction que l'on souhaite écrire s'appellera `compare(s, t)` et renverra 1 si `s` vient avant `t` dans le dictionnaire, -1 si `s` vient après `t`, et 0 si les deux mots sont égaux. On se limitera à des caractères parmi les 26 lettres de l'alphabet en minuscule ; sinon cela nécessite d'abord de décider comment comparer les majuscules, les lettres accentuées, et cela complique nettement les choses.

Pour l'écrire de façon récursive, on pourra décomposer un mot `s` en sa première lettre `s[0]` et le reste du mot obtenu avec la tranche `s[1:]`. Mais attention au mot vide `""` qui apparait naturellement quand on a enlevé plusieurs fois de suite la première lettre !

1. Au brouillon, proposer une formulation récursive du problème, en termes comme ci-dessus de première lettre et de comparaisons du reste du mot.
2. On donne `alphabet = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"`. Écrire une fonction (non récursive) `numero(x)` qui prend en argument un caractère seul `x` et renvoie sa position en tant que lettre de l'alphabet (de 0 pour `a`, à 25 pour `z`).
3. Écrire la fonction `compare(s, t)`.

Exercice 10.8 (**)
On représente une partie de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ par une liste contenant les éléments, rangés par ordre croissant de la partie. On souhaite écrire une fonction `parties(n)` qui donne la *liste* de *toutes* les parties de $\{1, 2, ..., n\}$. On peut démarrer avec $n = 0$, il n'y a que la partie vide. En général il y a deux types de parties : celles ne contenant pas n — ce sont donc des parties de $\{1, 2, ..., n-1\}$ — et celles contenant n, obtenues à partir des parties de $\{1, 2, ..., n-1\}$ en leur rajoutant n.

Écrire la fonction récursive `parties(n)`.

Par exemple, l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3\}$ est

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$$

et la fonction produit le résultat

```
>>> parties(3):
[[], [1], [2], [1, 2], [3], [1, 3], [2, 3], [1, 2, 3]]
```

IV Annexe : la pile d'appels

Le mécanisme d'appel Pour comprendre la récursivité, il est important de comprendre plus en profondeur le processus d'appel de fonction. Reprenons notre exemple

```python
def factoriel(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n * factoriel(n-1)
```

Lors d'un appel tel que `factoriel(5)`, alors la fonction démarre avec $n = 5$ et on se retrouve à devoir appeler `factoriel(4)`. Mais avant de passer à `factoriel(4)`, il faut d'abord sauvegarder dans la mémoire l'endroit précis où nous en sommes de `factoriel(5)`, c'est là qu'une fois qu'on aura obtenu le résultat du calcul de `factoriel(4)` on pourra le multiplier par 5 puis le renvoyer. À chaque appel de la fonction à un rang $n-1$, l'ordinateur doit sauvegarder diverses informations sur l'état de la fonction au rang n avant de sauter au rang $n-1$, et ces informations sont organisées selon une **pile** (exactement comme une pile d'assiette, les nouvelles informations sont posées directement par-dessus les anciennes). Ainsi quand l'appel `factoriel(4)` — dont les informations étaient sur le dessus de la pile — se termine, on revient directement à `factoriel(5)`.

Cette structure de pile s'observe très bien en comparant les programmes suivants, dont la seule différence est l'ordre des instructions entre le `print` et l'appel récursif : tester (par exemple avec $n = 10$) et comparer

```python
def boum(n):
    if n == 0:
        print("BOUM")
    else:
        print(n)
        boum(n-1)
```

```python
def top(n):
    if n == 0:
        print("TOP")
    else:
        top(n-1)
        print(n)
```

Une analogie Une analogie est la suivante. Imaginons qu'on lise un livre de mathématiques au chapitre sur les bijections. Mais qu'on ne comprenne pas. Alors on laisse le livre ouvert mais par dessus on ouvre un autre livre sur les ensembles et la logique. Mais on ne comprend toujours pas. Alors on laisse celui-ci ouvert et on ouvre un livre de lycée. Là, on lit et on comprend. À la fin on referme le livre de lycée et on retombe sur celui d'ensembles et de logique, qu'on peut continuer à lire. Et quand on a fini on le referme et on retombe là où on en était sur les bijections. Les livres se sont empilés sur le bureau, chaque lecture étant mise en pause à un moment pour ouvrir un autre livre par-dessus, et lorsqu'il est refermé on reprend exactement la lecture au point où on était.

Dans d'autres langages Certains langages de programmation ont été conçus pour encourager la récursivité, avec un point de vue plus proche des mathématiques. C'est le cas du langage OCaml, enseigné notamment en MPSI et MP2I, réputé pour ses algorithmes qui transforment par derrière un programme récursif en une version non-récursive tout aussi efficace. Dans ce langage, même les listes sont définies de façon récursive : soit c'est la liste vide, soit c'est un élément (*tête*) attaché au reste de la liste (*queue*). Une fonction aussi simple que la longueur d'une liste est alors récursive : c'est zéro pour la liste vide, et sinon c'est un de plus que la longueur de la queue. On parle de **type récursif**. Cela est particulièrement intéressant pour traiter des structures en arbres, graphes, et de divers problèmes de combinatoire, qui seraient nettement plus compliqués à écrire avec de simples listes et boucles Python. Un exemple d'OCaml qui se lit aussi facilement que la description mathématique :

```
type liste =
  | Vide
  | Attache of int * liste

let rec longueur l = match l with
  | Vide -> 0
  | Attache(tete, queue) -> 1 + longueur queue
```

TP 11
Dichotomie

Le mot **dichotomie** provient du grec et signifie « couper en deux ». En informatique, il s'agit ici d'une méthode générale de recherche de solution d'un problème en coupant l'intervalle de recherche en deux à chaque étape. Nous allons d'abord l'illustrer par un jeu simple et bien connu.

I Préliminaire : un jeu

On connait le jeu suivant entre deux joueurs : l'un pense à un nombre entre 1 et 100 et l'autre doit le deviner en formulant ses propositions, auxquelles la réponse sera seulement « plus petit », « plus grand » ou bien « trouvé ! ».

Il est tout à fait possible de programmer ce jeu, où c'est le programme qui choisit le nombre au hasard !

Exercice 11.1
Compléter le programme fourni : il choisit un nombre au hasard, l'affiche (au début, pour faire des tests, et ensuite on supprimera la ligne) puis demande à l'utilisateur une proposition de nombre. Il dit ensuite si le nombre à trouver est plus grand, plus petit, ou si c'est bon.

Jouez à ce jeu pendant quelques minutes.

Exercice 11.2
Modifier le programme pour qu'en plus il compte le nombre de tentatives du joueur, affichant à la fin un « trouvé en n coups », et tenter de gagner en un minimum de coups possibles.

On peut aussi apporter diverses modifications comme par exemple choisir les nombres dans un intervalle plus grand, ce qui augmente la difficulté.

Exercice 11.3
Quelle semble être la meilleure stratégie possible, en rapport avec le titre de ce TP ? Pour un nombre entre 1 et 100, en combien de coups êtes-vous absolument certain de gagner ? Plus généralement pour un nombre entre 1 et N, pouvez donner une formule pour le nombre de coups maximal en lesquels on est certain de gagner, et le démontrer ?

II Application aux solutions d'équations

On s'inspire de cette méthode pour trouver les solutions d'une équation. Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue et croissante, on cherche une solution à l'équation $f(x) = y$ en supposant $f(a) < y < f(b)$. Alors on calcule $m = \frac{a+b}{2}$ et on compare $f(m)$ avec y. Si $f(m) < y$ on doit chercher x entre m et b, et si $f(m) > y$ on doit chercher x entre a et m. Cela divise par deux la taille de l'intervalle de recherche.

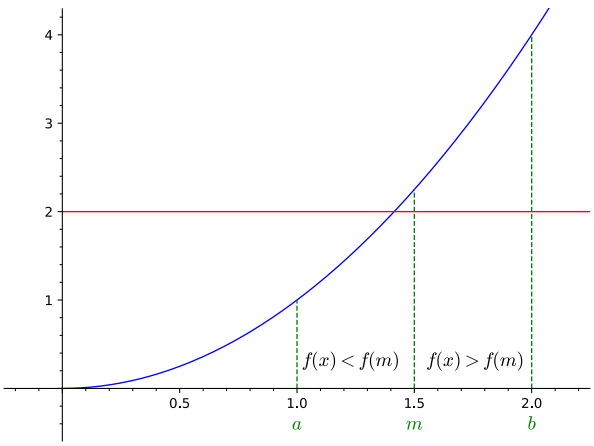


Figure 2. – Recherche par dichotomie de la solution à $f(x) = 2$, où $f : x \mapsto x^2$.

Remarque. On pourra traduire ces idées en une *preuve* du théorème des valeurs intermédiaires. Mais cela nécessite d'abord quelques pré-requis sur la continuité…

Exercice 11.4 *Échauffement*
On cherche les approximations successives de $\sqrt{2}$ qu'on obtiendrait avec cette méthode (mais sans utiliser la fonction racine carrée). Ici c'est la fonction $f : x \mapsto x^2$, et on sait $f(1) < 2 < f(2)$, autrement dit $1 < \sqrt{2} < 2$. À l'étape suivante on calculera $m = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ puis $m^2 = \frac{9}{4} > 2$. Ceci *démontre* que $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ (de l'autre côté, si $\frac{3}{2} < x < 2$ alors $x^2 > 2$). On peut continuer en prenant le milieu entre 1 et $\frac{3}{2}$: c'est $m = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{4}$, et on calcule $m^2 = \frac{25}{16}$, mais $m^2 < 2 = \frac{32}{16}$, donc ceci démontre $\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ soit $1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Et recommencer, etc.

1. Écrire une fonction `racine(n)` qui effectue n étapes de ce procédé, en affichant à chaque fois les bornes (a, b) de l'encadrement obtenu.
2. Améliorer la fonction en `racine2(s)` qui prend en argument un seuil $s > 0$ (on lui donnera par exemple $s = 10^{-6}$ avec la syntaxe `racine2(1e-6)`), et s'arrête quand l'encadrement (a, b) vérifie $b - a < s$. Si tout se passe bien on a à tout moment $a < b$ dans la boucle.
3. Bonus : la dichotomie est naturellement un algorithme récursif, car chercher par dichotomie la solution entre a et b revient à chercher par dichotomie la solution soit entre a et m soit entre m et b. Il faut alors mettre les bornes de l'intervalle en tant qu'arguments de la fonction. Écrire la fonction récursive `racine3(s, a, b)` qui renvoie le couple (a, b) tel que la solution est garantie être dans (a, b) avec $b - a < s$.

Exercice 11.5
Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x - 3$.

1. Avec un tableau de variations, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions x_1, x_2, x_3. En calculant quelques valeurs particulières de f, donner un encadrement (par des nombres entiers) de chacune de ces solutions.
2. En déduire trois fonctions `solution1(s)`, `solution2(s)`, `solution3(s)`, donnant chacune un encadrement de la solution avec un écart strictement inférieur à $s > 0$. Attention car f est décroissante autour de x_2 !

Exercice 11.6
On s'intéresse maintenant à l'équation $(E_t) : e^x = 3 + tx$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, mais avec un paramètre réel $t > 0$. On pourra utiliser la fonction `exp` du module `math` mais dans tous les cas il n'existe pas de formule simple pour la solution de cette équation. On pose $f_t : x \mapsto e^x - 3 - tx$.

1. Avec un tableau de variations (et un petit calcul de limites), justifier que l'équation $f_t(x) = 0$ admet bien deux solutions, une $x_t > 0$ et une autre $y_t < 0$.

Diverses intuitions ou représentations graphiques permettent de se rendre compte de la chose suivante : plus t est grand plus la solution x_t part vers $+\infty$; et plus t est petit plus la solution y_t part vers $-\infty$. On ne peut donc pas raisonnablement donner un encadrement de x_t et de y_t a priori qui soit indépendant de t.

2. Écrire une fonction `borne_x(t)` qui prend en argument le paramètre $t > 0$ et qui renvoie le *plus petit entier* $n \geqslant 0$ tel que $f_t(n) \geqslant 0$.
3. En déduire une fonction `solution_x(t, s)` qui prend en argument le paramètre $t > 0$ et un seuil $s > 0$, et cherche par dichotomie la solution x_t avec un seuil s, ou au départ x_t est supposé être entre 0 et la borne renvoyée par la fonction précédente.
4. De même, écrire une fonction `borne_y(t)` qui renvoie le plus petit entier $n \leq 0$ tel que $f_t(n) \geqslant 0$, puis une fonction `solution_y(t, s)` qui cherche par dichotomie la solution y_t avec le seuil s.

III Application à la recherche dans une liste

La dichotomie est une méthode terriblement efficace pour rechercher un élément dans une liste à condition qu'elle soit **triée**.

Exercice 11.7
Révisions : écrire une fonction `est_croissante(L)` qui renvoie `True` si la liste `L` est triée, et `False` sinon.

Exercice 11.8
Révisions : écrire une fonction `cherche_iteratif(L, x)` qui parcourt la liste et donne le premier indice où l'élément `x` apparait, et renvoie `None` s'il n'apparait pas.

La méthode par dichotomie pour chercher à quel indice apparait l'élément `x` consiste à partir d'une liste triée `L` de longueur n et à comparer l'élément `x` avec un élément au milieu de `L`. Si `x` est plus grand, c'est qu'il faut chercher dans la moitié de droite de la liste, ceux qui sont plus grand que le milieu, et sinon il faut chercher dans la moitié de gauche. On travaillera donc en initialisant deux variables : `a` à 0 et `b` à $n-1$ (le dernier indice de la liste).

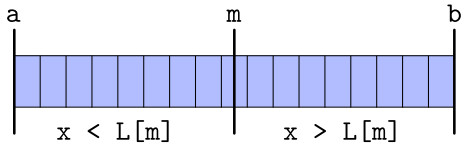


Figure 3. – Dichotomie dans une liste.

Par rapport au cas des fonctions continues, les nouveaux problèmes suivants se posent :

1. Il n'y a pas toujours exactement un élément au milieu de la liste (cela dépend de la parité de n), on ne peut donc pas à n'importe quel moment comparer `x` avec `L[(a+b)/2]`. D'une part `L[3.5]` affichera une erreur, mais en fait même `L[3.0]`, il faut donc travailler avec la division en nombres entiers `(a+b) // 2`. Cela revient à comparer `x` avec l'élément de `L` au milieu dans la moitié gauche si n est pair ; par exemple dans une liste de longueur 8 le dernier indice est 7, la première moitié correspond aux indices de 0 à 3 et la deuxième moitié de 4 à 7, et `(0+7) // 2 = 3` donc on comparera `x` avec `L[3]`.
2. L'élément `x` n'est pas nécessairement dans la liste, et on ne peut pas diviser par deux les intervalles à l'infini. Il faut donc savoir s'arrêter quand l'écart entre a et b devient exactement 1 et détecter alors si on trouve l'élément `x` à l'indice a ou b ou pas du tout.
3. Dans le cas où `x` serait strictement plus grand que tous les éléments de la liste, l'algorithme décrit ici s'appliquerait jusqu'au bout pour faire remonter la borne a jusqu'à b ; de même si `x` était plus petit que le minimum, l'algorithme décrit descendrait jusqu'à a. Il est donc préférable de tester dès le départ si `x` est bien compris entre `L[0]` et `L[n-1]`.

Exercice 11.9
Écrire la fonction `cherche_dichotomie(L, x)` qui recherche par cette méthode de dichotomie si l'élément `x` est dans la liste `L`, et renvoie son indice si elle le trouve et `None` s'il n'est pas dans la liste.

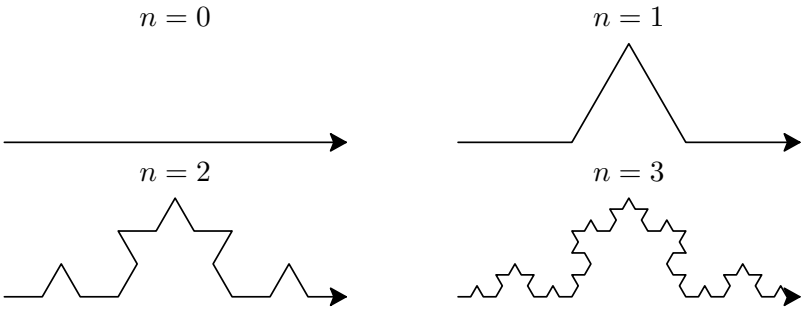
Les fichiers ci-joints contiennent un dictionnaire français de plus de mots issu du logiciel libre de correction orthographique GNU Aspell, et un bout de programme qui va charger le dictionnaire comme une liste de mots. Sur les mots, l'opération Python `<` correspond à l'ordre lexicographique, ainsi la fonction précédente s'applique directement si `L` est la variable nommée `dictionnaire` et si `x` est un mot. Si tout se passe bien, le dictionnaire a déjà été trié dans l'ordre de Python. Cela provoque quelques étrangetés pour un humain : les mots avec des majuscules sont rangés d'abord, les mots commençant par des lettres accentuées sont rangés à la fin. Peu importe cependant, tant que le dictionnaire est bien rangé par ordre croissant *au sens* de l'opération `<` telle qu'elle est construite en Python.

Exercice 11.10
Avec le fichier joint, tester la recherche dans le dictionnaire, à la fois itératif et par dichotomie. On pourra modifier la fonction `cherche_dichotomie(L, x)` pour afficher le nombre d'étapes qu'elle réalise, et comparer cette valeur avec le logarithme en base 2 de la longueur du dictionnaire. Éventuellement renommer `cherche_dichotomie_print` la version qui affiche le nombre de coups.

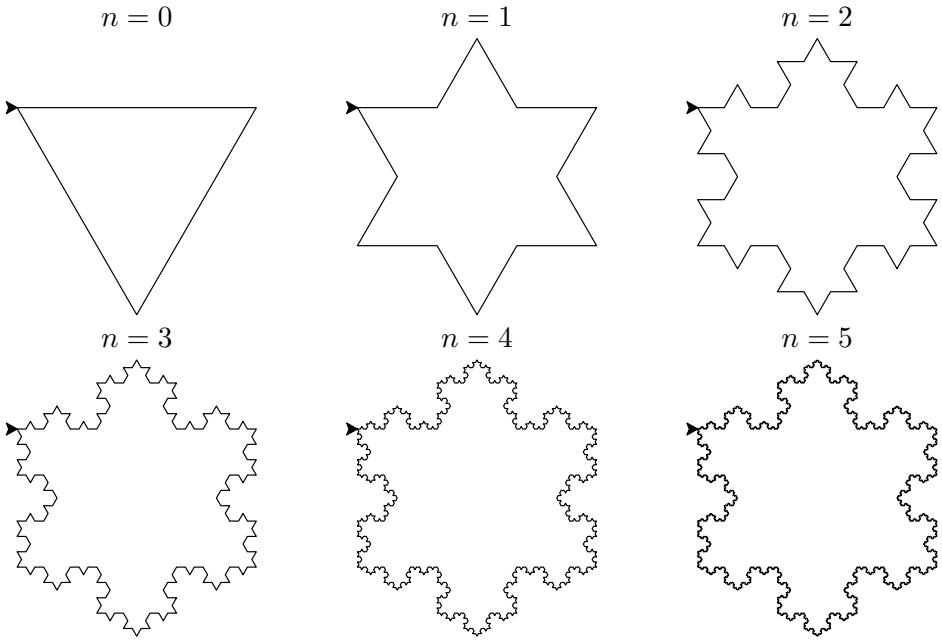
Exercice 11.11
Le fichier joint contient un morceau de programme pour chronométrer le code Python, avec la fonction `timeit` du module `timeit`. Elle prend en argument le nombre de répétitions qu'elle va effectuer, et le résultat est exprimé en secondes. Tester le chronométrage, sur divers mots, à la fois avec les recherches itératives et dichotomiques (attention, pour chronométrer sa fonction il est important qu'elle ne fasse pas de `print`), avec au maximum un millier de répétitions.

TP 12
Algorithmes récursifs

Le but du TP est de tracer le **flocon de Von Koch**. D'abord on trace la courbe de Von Koch : c'est une courbe qui est obtenue par étapes successives en partant d'une ligne droite puis en la coupant en trois segments égaux et en remplaçant le segment central par un triangle équilatéral. Chaque étape est numérotée par un entier n :



Puis on tracera facilement le flocon complet :



I Introduction au module `turtle`

Le module `turtle` implémente en Python une méthode ancienne d'apprentissage de la programmation (remontant au début des années 70 !) basée sur une interface graphique appelée **la tortue**.

Il faut imaginer qu'au démarrage du programme se tient au centre de l'écran une tortue tenant un crayon. Les instructions du programme donnent notamment à la tortue l'ordre d'avancer en ligne droite d'un certain nombre de pas, ou bien de tourner à gauche ou à droite. La tortue laisse donc un trait derrière elle, ce qui permet de tracer des figures intéressantes, surtout quand on combine ces instructions avec des fonctions et des boucles Python. Éventuellement, d'autres fonctions permettent de configurer l'épaisseur ou la couleur du tracé. Le crayon peut aussi être relevé — auquel cas la tortue se déplace sans laisser de tracé derrière elle — jusqu'à ce que, éventuellement, il soit de nouveau abaissé.

Le système de coordonnées utilisé est tel qu'au démarrage la tortue est au centre de l'écran aux coordonnées $(x, y) = (0, 0)$, et tournée vers la droite. Les dimensions de la fenêtre (donc les absisses et ordonnées minimales et maximales, c'est à dire les coordonnées du bord de la fenêtre) peuvent dépendre des configurations de l'utilisateur, on gardera donc la tortue dans une zone raisonnable au centre de la fenêtre.

Pour commencer on chargera le module `turtle` avec cette ligne **au tout début du fichier** et à exécuter une seule fois :

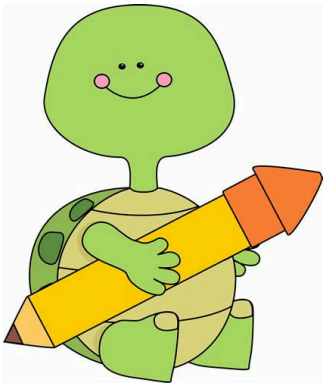


Figure 6. – Source : `https://www.mycutegraphics.com/`

```
from turtle import *
```

On peut alors utiliser toutes les fonctions du module sans écrire à chaque fois le préfixe `turtle`.

Tester ensuite directement (mode script, dans une cellule, puis exécuter) les lignes suivantes pour vérifier que tout fonctionne correctement :

```
#%%
reset()
forward(200)
done()
#%%
```

La première ligne demande à bien démarrer avec une nouvelle fenêtre blanche. La deuxième donne l'ordre à la tortue d'avancer de pas (ajuster éventuellement ce nombre selon la taille de votre écran et de la fenêtre qui apparait). Enfin la dernière ligne met le programme en pause jusqu'à ce que l'utilisateur ferme la fenêtre. On commencera donc toujours nos programmes par ce `reset()` et on terminera toujours par `done()`.

Pour la liste des commandes disponibles, on pourra se référer à

- `https://perso.limsi.fr/pointal/_media/python:turtle:turtleref.pdf` : un aide-mémoire (pour les enfants).
- `https://docs.python.org/fr/3/library/turtle.html` : la documentation officielle (pour les vrais de vrais).

Nous en utiliserons en fait un tout petit nombre, les autres sont à découvrir et tester par vous-même !

- `reset()` : ré-initialise la fenêtre et la tortue à son point de départ, première instruction du programme.
- `done()` : affiche la fenêtre et attend que l'utilisateur la ferme, dernière instruction du programme.
- `forward(n)` : avance de `n` pas.
- `left(r)` : tourne à gauche de l'angle `r` exprimé en degrés.
- `right(r)` : idem mais tourne à droite.
- `goto(x, y)` : déplace la tortue à la position (x, y). Sera utile au début du programme pour tenter de centrer la figure, précédé éventuellement d'un levé de crayon.
- `penup()` : lever le crayon. La tortue se déplace, mais ne laisse pas de tracé derrière elle.
- `pendown()` : rabaisser le crayon.

Exercice 12.1 *Échauffement*

1. Tracer un carré.
2. Tracer un triangle équilatéral.

Exercice 12.2

Écrire une fonction `polygone(n)` qui trace un polygone régulier à n côtés.

Pour éviter que le dessin ne déborde de l'écran, on pourra diviser la longueur du côté par n (en effet la taille du dessin final sera à peu près proportionnelle à n et à la longueur du côté).

Attention, la fonction elle-même ne doit pas utiliser `reset()` et `done()` (c'est important). On appellera donc la fonction ainsi :

```
#%%
def polygone(n):
    ...

reset()
polygone(7)
done()
#%%
```

Exercice 12.3
Tracer la première étape ($n = 1$) d'une courbe de Von Koch, en calculant d'abord à la main les angles et les longueurs en jeu.

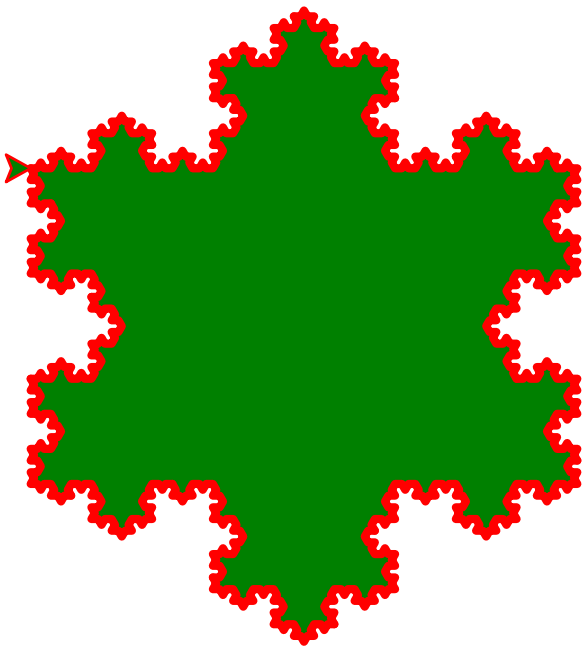
II Le flocon de Von Koch

Pour tracer un flocon de Von Koch, on va d'abord tracer la courbe de Von Koch et écrire une fonction récursive qui prend deux arguments :

- `n` : le numéro de l'étape qu'on est en train de tracer. Pour $n = 0$ la courbe est une simple ligne droite, pour $n = 1$ c'est la ligne polygonale de 4 morceaux tracée précédemment (mais normalement on n'a pas besoin de distinguer ce cas dans la récursivité).
- `L` : un paramètre qui indique la longueur du morceau que l'on est en train de tracer, et qu'il faut diviser par 3 dans les appels récursifs.

Exercice 12.4
Écrire une fonction `vonkoch(n, L)` récursive qui trace la courbe de Von Koch : pour $n = 0$ elle trace une ligne droite de longueur `L`, et sinon elle s'appelle récursivement en divisant la longueur par 3 et entre les appels récursifs la tortue doit tourner comme dans la section précédente.

Pour l'appeler proprement, on écrira alors (directement dans une cellule à part) :



```
#%%
reset()
vonkoch(n, L)
done()
#%%
```

Pour dessiner le flocon complet sous forme hexagonale, il suffit… d'appeler plusieurs fois la fonction précédente, en tournant entre temps d'un angle approprié.

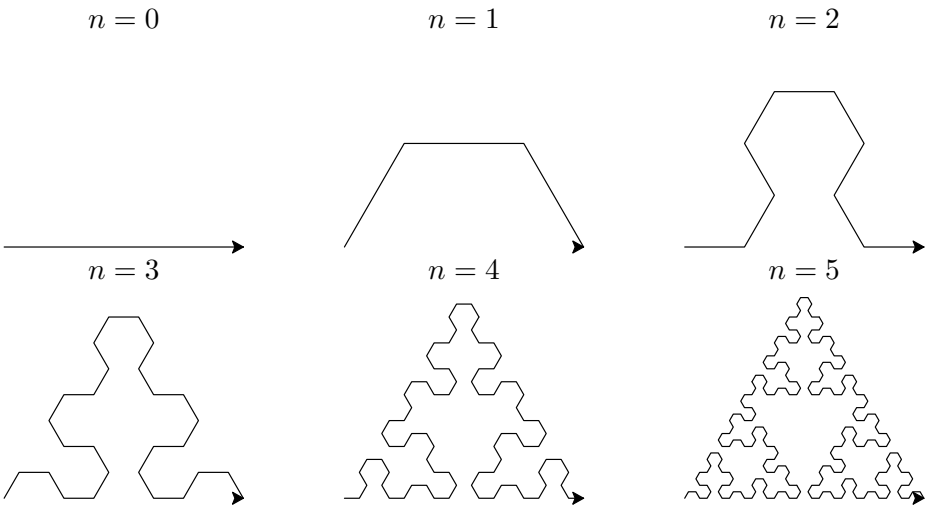
Exercice 12.5
Écrire une fonction `flocon(n, L)` qui trace le flocon de Von Koch complet avec n étapes (ceci n'est plus une fonction récursive).

Pour que ce soit plus joli, il faut lire la documentation !

Exercice 12.6
Lire la documentation ou l'aide mémoire pour ajuster la couleur du trait, la couleur de remplissage, le titre de la fenêtre, et pour bien centrer la figure.

III Le triangle de Sierpinski

Il s'agit de la courbe obtenue par la suite de transformations de la figure suivante :



Encore une fois pour $n = 0$ il s'agit d'une ligne droite, et pour $n = 1$ on appellera cela une *tuile*. À chaque étape, les morceaux de ligne droite sont remplacés par des tuiles. Mais attention ! Il y a deux types de tuiles, celles tournant d'abord vers la gauche (comme le cas $n = 1$ ici) et celles tournant d'abord vers la droite (le premier et le dernier du cas $n = 2$, alors que celle du milieu tourne vers la gauche).

Exercice 12.7
Quels sont les longueurs et les angles en jeu pour tracer une tuile ? Observer que dans le dessin final on voit beaucoup de triangles équilatéraux et d'hexagones réguliers. Puis écrire comme échauffement une fonction `tuile(L)` qui tracer l'étape $n = 1$ d'une tuile de base `L`.

On écrira alors **deux fonctions mutuellement récursives** `tuile_g(n, L)` et `tuile_d(n, L)`. Pour $n = 0$ ce sont toutes les deux des lignes droites, pour $n = 1$ `tuile_g` est la fonction précédente et `tuile_d` est exactement son miroir — mais si on s'y prend bien on n'a en fait pas besoin de distinguer le cas $n = 1$ dans la récursivité. Enfin, chacune de ces fonctions fait appel récursivement à elle-même ainsi qu'à l'autre, avec le rang $n - 1$ et la longueur $L/2$.

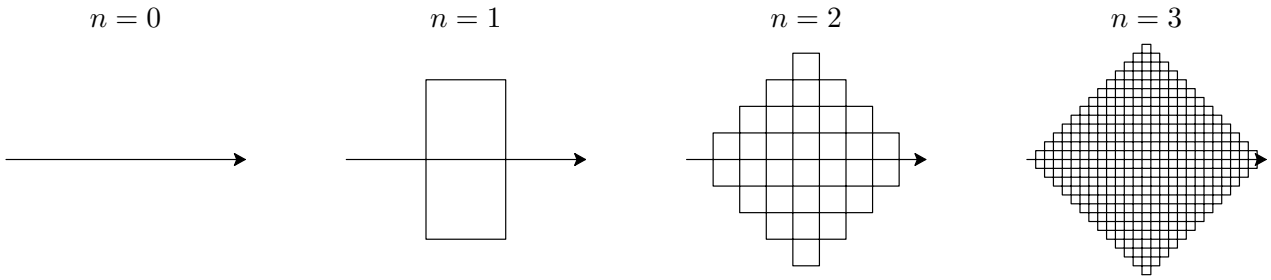
Enfin, attention à un dernier piège : après avoir tracé une tuile, il est important de faire tourner la tortue pour qu'elle soit bien dans le même sens qu'au départ (observez bien la tortue du cas $n = 1$ ci-dessus). Cela

est nécessaire pour que l'appel récursif fonctionne correctement, et qu'à chaque étape la tortue se retrouve bien exactement dans la même position, qu'elle ait tracé juste avant une ligne droite ou bien une tuile plus petite.

Exercice 12.8
Écrire les fonctions `tuile_g(n, L)` et `tuile_d(n, L)`, puis testez en appelant l'une des deux au choix.

IV La courbe de Peano

C'est la courbe obtenue par la succession suivante d'étapes.



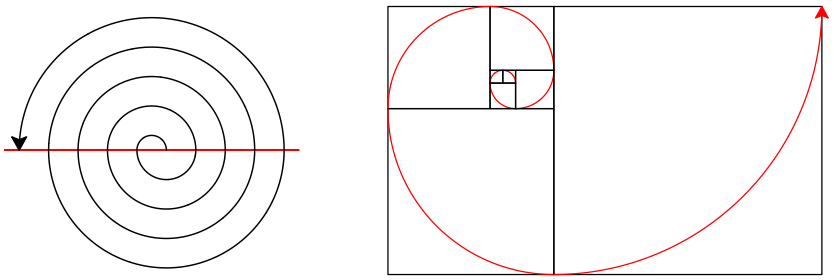
Là encore pour $n = 0$ il s'agit d'une simple ligne droite. Pour $n = 1$ le motif peut être obtenu en parcourant cette ligne dans diverses ordres possibles, quitte à repasser plusieurs fois au même point. À chaque étape, chaque segment est remplacé par une courbe de Peano de taille divisée par 3.

Exercice 12.9
Écrire la fonction `peano(n, L)` qui trace la courbe de Peano à l'étape n, en partant d'une longueur `L`.

On peut démontrer que « à la limite », la courbe obtenue remplit réellement tout un carré. On trace une courbe de dimension 1 remplissant une surface de dimension 2 !

V La spirale de Fibonacci

Il n'y a ici plus de récursivité. Une spirale simple est obtenue par une succession de morceaux de cercles, dont le diamètre augmente régulièrement. Dans le cas le plus simple, c'est une succession de demi-cercles, dont les rayons forment une progression arithmétique.



Exercice 12.10
Écrire une fonction `spirale(n)` qui trace une spirale simple, avec n demi-cercles consécutifs. On pourra par exemple augmenter les rayons de à chaque itération.

Un autre cas célèbre est la spirale de Fibonacci. Observer comme il s'agit d'une succession de quarts de cercles, dont les rayons successifs sont proportionnels aux termes de la suite de Fibonacci.

Exercice 12.11
Écrire la fonction `spirale_fibonacci(n)` qui trace la spirale avec n quarts de cercles, dont les rayons suivent les termes successifs de la suite de Fibonacci (on peut prendre les premiers termes égaux à 10 et 10).

TP 13
Révisions et consolidation 2

Exercice 13.1 *Nouvel an*

1. Écrire une fonction **récursive** `decompte(n)` qui affiche un décompte puis souhaite la bonne année. Par exemple avec $n = 5$ on veut le résultat suivant :

```
>>> decompte(5)
5
4
3
2
1
Bonne année !!!
```

2. Que se passe-t-il si dans le programme on inverse l'ordre des lignes `print` et `decompte(n-1)` ?

Exercice 13.2 *Classique classique*

1. Écrire une fonction `factoriel(n)`, **de façon récursive**, qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $n!$.

2. Écrire une fonction `arrangement(n, k)` qui calcule le nombre d'arrangements, défini pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ par

$$A_n^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

   en utilisant une boucle `for`.

3. Écrire la même fonction mais cette fois-ci sans boucle et **de façon récursive**. Étonnamment, il est plus facile de faire porter la récursivité l'entier k que sur n…

4. Selon le *paradoxe des anniversaires*, le nombre de façons d'attribuer à k personnes leur date d'anniversaire parmi 365 jours de façon à ce qu'au moins deux personnes soient nées le même jour est $365^k - A_{365}^k$. C'est le complémentaire de : attribuer à k personnes des dates toutes différentes parmi 365. La probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire est donc

$$p_k = \frac{1}{365^k}(365^k - A_{365}^k) = 1 - \frac{A_{365}^k}{365^k}$$

   Écrire une boucle qui affiche, pour k de 1 à 50, le nombre k et la probabilité p_k.

5. Bonus : écrire une fonction `seuil(p)` prenant en argument un nombre réel $p \in [0, 1]$ et renvoyant le plus petit $k \geqslant 1$ tel que $p_k \geqslant p$, c'est à dire le nombre minimal de personnes au-delà duquel la probabilité que parmi eux deux d'entre eux aient la même date d'anniversaire soit au moins p.

   Il est en fait bien plus efficace (à la fois en rapidité, et en précision des calculs à virgule flottante) d'écrire $p_k = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{365-k+1}{365}$ et de calculer ces termes avec une boucle.

Remarque. On trouve les fonctions suivantes dans le module `math`, à importer avec `import math` :

- `factorial(n)` : la factorielle de n.
- `perm(n, k)` : nombre d'arrangements de k objets parmi n, appelé en anglais *nombre de permutations*.
- `comb(n, k)` : coefficient binomial $\binom{n}{k}$, appelé en anglais *nombre de combinaisons*.

Si on peut se permettre de les utiliser parfois, il s'agit d'une question très très classique de savoir les ré-écrire. Pour que le programme soit efficace, il ne faut pas calculer $\frac{n!}{(n-k)!}$ en calculant la factorielle de chacun de ces

deux termes puis en divisant — cela fait apparaitre des nombres très très grands alors que beaucoup de termes se simplifient dans la fraction — mais l'écrire comme un produit ci-dessus.

Exercice 13.3 *Palindromes*
On rappelle qu'un mot est un **palindrome** s'il se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche, par exemple le mot KAYAK ou le prénom ANNA. On souhaite écrire une fonction `est_palindrome(m)` qui prend en argument une chaine de caractères `m` et qui renvoie `True` si `m` est un palindrome et `False` sinon. De plus, on souhaite que la fonction soit récursive. La condition d'être un palindrome se formule bien de façon récursive à partir du premier caractère `m[0]`, du dernier caractère `m[-1]`, et du mot restant (tranche) `m[1:-1]`.

1. Au brouillon, proposer une formulation récursive du problème. Attention à la condition d'initialisation : que se passe-t-il si le mot de départ était de longueur paire ? Et s'il était de longueur impaire ?
2. Écrire la fonction récursive `est_palindrome(m)`.

Exercice 13.4 *Le compteur d'anagrammes (d'après annale DS)*
On souhaite écrire un programme pour dénombrer tous les anagrammes d'un mot. Pour cela, on a besoin d'une fonction `factoriel(n)` et de compter combien de fois apparait chaque lettre. Pour simplifier, on suppose que nos mots sont écrits uniquement avec les 26 lettres de l'alphabet en minuscule (pas d'accents, pas de majuscule, pas d'autres signes de ponctuation) et on donne la variable Python `alphabet = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"`. Il est alors pratique de numéroter les lettres à partir de 0, ainsi `a` est la lettre 0 et `z` est la lettre 25.

1. Écrire, si ce n'est pas déjà fait, la fonction `factoriel(n)`.
2. Écrire une fonction `numero(x)` qui prend en argument un caractère seul `x` et renvoie son numéro en tant que lettre de l'alphabet.
3. Écrire alors une fonction `compte(m)` qui prend en argument une chaine de caractères `m` et qui renvoie une liste `C` de longueur exactement 26, telle que `C[j]` est le nombre de fois où la lettre numérotée `j` apparait dans `m`.
4. En déduire la fonction `anagrammes(m)` qui renvoie le nombre d'anagrammes du mot `m`.

   On rappelle qu'on l'obtient à partir de la factorielle de la longueur du mot, divisée par le produit des factorielles des nombres de fois que chaque lettre apparait. Comme $0! = 1$ il est cohérent de considérer que les lettres qui n'apparaissent pas apparaissent en fait 0 fois, ainsi ce ne sont pas des cas à traiter à part.
5. À partir des fonctions précédentes, écrire une fonction `sont_anagrammes(m, s)` qui renvoie `True` si les mots `m` et `s` sont bien anagrammes l'un de l'autre, et `False` sinon.

Exercice 13.5 *Mots de Fibonacci*
On s'intéresse aux suites de n chiffres `0` ou `1` telles qu'il n'y ait pas deux `1` consécutifs. Nous avons vu en TD que ces suites sont obtenues de deux façons :
- Soit à partir d'une suite de longueur $n-1$, à laquelle on rajoute comme premier terme un `0`,
- Soit à partir d'une suite de longueur $n-2$, à laquelle on rajoute `10` au début.

Ainsi le nombre u_n de telles suites vérifie la relation de Fibonacci $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

Mais le but cette fois-ci est de produire la liste de tous les mots qu'on peut obtenir, c'est une *liste* de *chaines de caractères*. Écrire cette fonctions `suites(n)` de façon récursive.

On obtient par exemple :

```
>>> suites(5)
['00000', '00001', '00010', '00100', '00101', '01000', '01001', '01010', '10000',
'10001', '10010', '10100', '10101']
```

Ici il y a bien 13 mots, et le nombre 13 est bien dans la suite de Fibonacci.

Exercice 13.6 (*) *Générer les anagrammes*

1. Écrire une fonction `anagrammesAB(a ,b)` qui renvoie la *liste* de tous les anagrammes qu'on peut produire avec seulement les lettres A et B, en utilisant a fois la lettre A et b fois la lettre B.

   Récursivement, ces anagrammes sont tous obtenus en prenant la lettre A et en la concaténant à tous les anagrammes possibles avec autant de B mais $a-1$ lettres A, ou bien en démarrant par B concaténé à tous les anagrammes possibles avec autant de A mais $b-1$ lettres B.

2. Plus généralement, écrire une fonction `anagrammes(C)` qui prend en argument une liste `C` de longueur 26 (comme dans l'exercice 4), donnant combien de fois doit apparaitre chaque lettre de l'alphabet, et qui renvoie la liste de tous les anagrammes possibles avec ce compte de lettres.

Exercice 13.7 (**) *Permutations*

Écrire une fonction `permutations(n)` qui renvoie une liste de toutes les permutations possibles de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. On doit par exemple avoir

```
>>> permutations(3)
[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]
```

Récursivement, un ordre naturel consiste à récupérer la liste des permutations de $[\![1,n-1]\!]$ et à insérer, dans chacune de ces permutations, le nombre n à chacune des positions possibles ; l'ordre obtenu pour l'énumération des permutations dépend de l'ordre des opérations effectuées. Pour « insérer » on pourra utiliser à la fois les tranches `L[a:b]` et l'opération de concaténation `+` entre listes.

TP 14
Numpy et Matplotlib

Nous introduisons deux bibliothèques qui sont d'utilité fondamentale dans toutes les sciences des données (traiter des grands tableaux, matrices, millions de données, faire des calculs et des statistiques dessus) et qui contribuent au succès croissant de Python dans ces domaines. De plus, ce TP fait le lien avec les cours de mathématiques à la fois pour les matrices et pour les fonctions.

Pour tout le TP, on peut écrire et exécuter une fois pour toute au début

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

On pourra se servir des documents suivants :
- `https://www.concours-agro-veto.net/IMG/pdf/polypython.pdf` : Aide-mémoire Python distribué au concours Agro-Véto.
- `https://matplotlib.org/cheatsheets/cheatsheets.pdf` : Mémo de la bibliothèque Matplotlib (un peu compliqué, mais illustre bien toutes les possibilités).

I Tableaux numpy

Avant tout, la bibliothèque `numpy` introduit un nouveau type d'objets qu'on appellera **tableaux**. En dimension 2, cela ressemble effectivement à des tableaux au sens usuels ; mais ils peuvent avoir un nombre de dimensions quelconque, ce qui peut être un peu subtil à manipuler. En dimension 1, les tableaux ressemblent en apparence aux listes Python, mais leur fonctionnement interne est bien différent, et nous allons nous attarder dessus.

On charge donc le module `numpy` une bonne fois pour toute au début avec la ligne

```
import numpy as np
```

Cela permet d'utiliser ses fonctions avec le préfixe `np`. Ce préfixe est tout à fait standard et est utilisé dans la documentation elle-même. La bibliothèque contenant des centaines de fonctions, il ne serait pas raisonnable de tout importer d'un coup sans préfixe…

I.1 Aperçu sur les tableaux à une dimension

Les tableaux sont des objets du type `ndarray`. On peut les créer avec les fonctions suivantes :

- Conversion depuis une liste : `np.array`

```
>>> X = np.array([1, 3, 5, 7])
>>> print(X)
[1 3 5 7]
```

- Tableau de n zéros : `np.zeros`

```
>>> X = np.zeros(10)
>>> print(X)
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
```

- De même, tableau de n uns : `np.ones`

```
>>> X = np.ones(10)
>>> print(X)
[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]
```

- Tableau d'entiers consécutifs : `np.arange`, avec la même syntaxe que `range`

```
>>> X = np.arange(10)
>>> print(X)
[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]
```

- Tableau de n valeurs « régulièrement espacées » entre deux bornes a et b : `np.linspace(a, b, n)`

```
>>> X = np.linspace(1, 3, 11)
>>> print(X)
[1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0]
```

Comme avec les listes, on peut :
- Demander la longueur du tableau : `len(X)`
- Accéder directement au i-ème élément : `X[i]`
- Trancher le tableau :
  - `X[a:b]` est le tableau des éléments d'indice i avec $a \leqslant i < b$, compatible avec des indices négatifs,
  - `X[a:]` est le tableau à partir de l'indice a, `X[:b]` celui jusqu'à l'indice b,
  - `X[a:b:r]` est celui des éléments d'indice i avec $a \leqslant i < b$ et des sauts de taille r,
  - `X[::-1]` est le tableau rangé en ordre inverse.

Quelles sont alors les différences avec les listes Python ?

1. Les tableaux Numpy sont représentés en mémoire comme un unique bloc, réservé dès le départ, dans lequel les valeurs sont posées les unes à côté des autres. Cela les rend plus proches du fonctionnement interne de l'ordinateur, qui ne sait que réserver des blocs de mémoire et accéder à chaque case de la mémoire repérée par une adresse unique (comme les adresses des maisons dans une très, très grande rue). Au contraire, les éléments d'une liste Python sont rangés un peu plus en vrac dans la mémoire et il n'est pas aussi rapide d'aller chercher les éléments uns par uns. Les tableaux Numpy sont donc plus compacts et plus efficaces.

2. Les éléments du tableau ont un **type** et doivent tous avoir le même type. Ce type détermine notamment la place qu'occupe chaque élément en mémoire (par exemple entier 8 bits occupant 1 octet, ou bien ou 64 bits soit 8 octets), et comment le nombre est représenté (avec ou sans signe ; entier ou flottant). L'intérêt de connaitre la place occupée en mémoire par chaque élément est justement de les placer côte à côte en mémoire de façon compacte et de connaitre exactement la taille totale à réserver pour faire rentrer le tableau : dans un tableau de taille n où chaque élément occupe c octets, la taille totale du bloc de mémoire est *exactement* $n \times c$ et donc pour programmer finement un ordinateur en présence de millions de données il faut parfois être capable de se poser la question de la taille nécessaire.

   On accède au type avec la variable `X.dtype`, et à la place occupée en mémoire (en octets) avec la variable `X.nbytes`, observez :

```
>>> X = np.array([1, 3, 5])
>>> type(X)
<class 'numpy.ndarray'> # X est un tableau numpy
>>> X.dtype
dtype('int64') # entiers codés sur 64 bits, soit 8 octets
>>> len(X)
3 # 3 cases
>>> X.nbytes
24 # total : 3 * 8 = 24 octets octets occupés en mémoire
```

   Encore :

```
>>> Y = np.linspace(1.0, 2.0, 3.0)
>>> Y.dtype
dtype('float64') # flottants 64 bits, soit 8 octets
```

   Ou

```
>>> Z = np.arange(10, dtype="uint8")
>>> print(Z)
[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]
>>> Z.dtype
dtype('uint8') # entiers non-signés sur 8 bits, soit 1 octet
>>> Z.nbytes
10 # exactement 10 octets au total
```

Observez :

```
>>> X = np.arange(260, dtype="uint8")
>>> print(X)
[  0   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14  15  16  17
18  19  20  21  22  23  24  25  26  27  28  29  30  31  32  33  34  35
...
234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251
252 253 254 255   0   1   2   3]
```

En effet sur 8 bits non-signés on peut représenter tous les nombres entre 0 et 255, et au-delà le compteur revient à 0. Le tableau est plus compact (un seul octet par case) à la condition de savoir qu'on n'aura pas besoin de nombres au-delà de 255 !

3. À cause de cette structure, les tableaux ont une taille **fixe**, déterminée à leur création. On ne peut pas si facilement faire un `append` ou insérer des éléments en plein milieu.

4. Les **opérations vectorielles**, voir ci-dessous, sont extrêmement rapides quand elles agissent sur des tableaux Numpy.

I.2 Les opérations vectorielles

Les opérations mathématiques habituelles `+`, `*`, etc ont été reprogrammées pour agir directement sur les tableaux Numpy, en effectuant toutes leurs opérations « case par case ». Observez :

```
>>> X = np.array([1, 3, 5])
>>> Y = np.array([6, -3, 8])
>>> X + Y
array([ 7,  0, 13])
>>> X * Y
array([ 6, -9, 40])
>>> -X
array([-1, -3, -5])
>>> Y**2
array([36,  9, 64])
```

L'intérêt de ces opérations — que l'on saurait faire aussi avec une boucle `for` habituelle — est qu'elles s'exécutent beaucoup plus rapidement. Au lieu de demander à décoder la boucle Python ligne par ligne, elles donnent l'ordre à l'ordinateur « d'un seul coup » d'effectuer les opérations sur chacune des cases du tableau, en communiquant directement avec le processeur et la mémoire de la façon la plus optimisée possible. On les appelle ici des **opérations vectorielles**, où le mot « vecteur » est synonyme de tableau de nombres (ou en mathématiques : élément de $\mathbb{R}^n$). Ce sont des opérations qui agissent sur des vecteurs et non pas simplement sur des nombres.

La bibliothèque Numpy contient aussi de nombreuses fonctions mathématiques usuelles qui s'appliquent directement à chaque case d'un tableau : `np.exp`, `np.sin`, `np.cos`, `np.arctan`, `np.log`, `np.sqrt` (racine carrée), ainsi que des constantes comme `np.pi` (nombre π)… Là encore, ces opérations vectorielles s'exécutent d'un ordre de grandeur du millier de fois plus rapide que de faire une boucle Python pour les appliquer sur chaque élément.

Typiquement pour obtenir les valeurs de la fonction exponentielle sur $[0, 1]$ en divisant cet intervalle en 100 points, on écrit simplement

```
>>> X = np.linspace(0, 1, 100)
>>> print(X)
[0.         0.01010101 0.02020202 0.03030303 0.04040404 0.05050505
 0.06060606 0.07070707 0.08080808 0.09090909 0.1010101  0.11111111
 ...
 0.96969697 0.97979798 0.98989899 1.        ]
>>> Y = np.exp(X)
>>> print(Y)
[1.         1.0101522  1.02040746 1.03076684 1.04123139 1.05180218
 1.06248028 1.07326679 1.0841628  1.09516944 1.10628782 1.11751907
 ...
 2.6371452  2.66391802 2.69096264 2.71828183]
```

Autrement dit cela « représente » une fonction par un échantillonage sur 100 points bien répartis, et nous allons voir que cela est très facile à manipuler en pratique.

II Représentations graphiques

On charge maintenant, une bonne fois pour toute, le sous-module `pyplot` de la librairie de représentations graphiques `matplotlib` avec la ligne

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Là encore cet alias est assez standard, d'autant plus qu'il évite d'écrire `matplotlib.pyplot` ce qui est un peu long…

La fonction principale que nous utiliserons est `plt.plot(X, Y)` qui prend au moins deux arguments : `X` et `Y` sont tous les deux, soit des listes, soit des tableaux `numpy`, de même taille, avec `X` une liste d'abscisses et `Y` une liste d'ordonnées. Les points vont être automatiquement reliés. Ensuite la fonction `plt.show()` permet d'afficher le graphique. Éventuellement, plusieurs appels successifs à `plt.plot()` vont superposer les graphiques (on préfère alors configurer correctement le style de points, de lignes, et les couleurs), jusqu'à ce qu'on appelle `plt.show()` qui affiche tout ce qui a été accumulé jusque là puis effacera tout après fermeture.

II.1 Graphes de fonctions

Pour représenter graphiquement une fonction, on a donc besoin de créer un tableau d'abscisses `X` de valeurs régulièrement espacées, puis d'un tableau des ordonnées `Y` qu'on crée avec les opérations vectorielles, et d'afficher le résultat. Voici le modèle de base, pour par exemple $x \mapsto x^2 - 1$:

```
# abscisses
X = np.linspace(-1, 3, 100)
# ordonnées
Y = X**2 - 1
# tracer
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

Exercice 14.1
Tracer les graphes des fonctions suivantes.

- $f_1 : x \mapsto x^3 - 5x$ sur $[-4, 4]$
- $f_2 : x \mapsto \sin(x)$ sur $[0, 2\pi]$,
- $f_3 : x \mapsto e^x - 3x + 1$ sur $[-3, 3]$,

Le nombre de points d'échantillonnage doit être choisi pour être suffisamment fin, sinon la courbe n'est pas assez lisse. Mais si on en met trop, le tableau est inutilement trop gros et le programme peut être lourd à charger. Comme ci-dessus, 100 est un bon compromis pour l'instant.

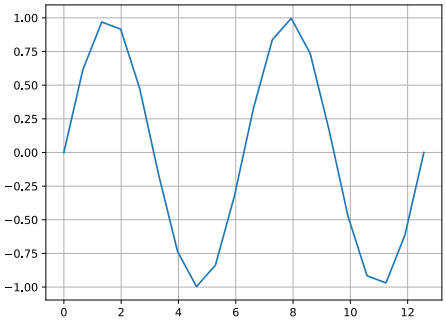


Figure 11. – La fonction sinus sur $[0, 4\pi]$, avec trop peu de points d'échantillonnage.

La bibliothèque Matplotlib contient de nombreuses options pour configurer le tracé et l'apparence de la fenêtre. Citons seulement :

- `plt.title("titre")` : donne un titre à la fenêtre.
- `plt.xlabel("titre")` : donne un titre à l'axe des x.
- `plt.ylabel("titre")` : de même pour l'axe des y.
- `plt.xlim(a, b)` : fixe les bornes sur l'axes des x entre a et b. Si on ne les fixe pas manuellement, elles sont ajustées automatiquement pour faire rentrer tout le graphe.
- `plt.ylim(a, b)` : de même pour l'axe des y.
- `plt.axis("equal")` : rend le repère orthonormé.
- `plt.grid()` : affiche une grille.
- Un troisième argument passé à `plt.plot()` sous la forme d'une chaine de trois caractères permet à la fois de changer le type de point, le style de trait et la couleur. Par exemple `"+-r"` signifie « points tracés par des symboles plus, reliés par des lignes simples, couleur rouge ». Voir l'aide-mémoire ou la documentation. Ces options, et bien d'autres encore, peuvent être passées à `plot()` sous forme d'arguments optionnels, par exemple `marker="+"`, `linestyle="-"`, `color="r"`.

Exercice 14.2
Améliorer un peu le tracé des fonctions précédentes (couleur, style de ligne, titres des fenêtres et des axes).

II.2 Courbes paramétrées

Dans une **courbe paramétrée**, on trace un point de coordonnées $(x(t), y(t))$ avec un paramètre t qui varie dans un certain intervalle, et donc x, y sont tous les deux des fonctions du même t. Pour tracer une telle courbe, il faut donc échantillonner un intervalle pour t dans un tableau `T`, puis en déduire deux tableaux `X` et `Y`. Le modèle de base est le suivant qui trace la courbe paramétrée (cercle)

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

```
T = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
X = np.cos(T)
Y = np.sin(T)
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

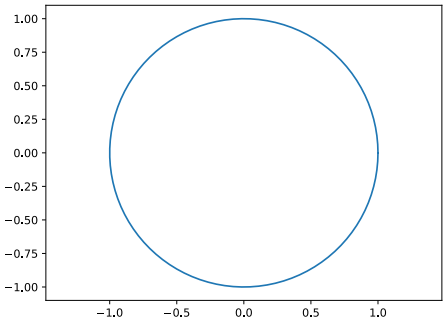


Figure 12. – Un cercle.

Exercice 14.3

1. Tracer les courbes paramétrées *(courbes de Lissajous)*

$$\begin{cases} x(t) = \cos(pt) \\ y(t) = \sin(qt) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

pour différentes valeurs du couple (p, q), par exemple $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$. Attention au nombre de points d'échantillonnages pour que la courbe ait l'air assez lisse !

2. Tracer la *cardioïde*

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos(t))\cos(t) \\ y(t) = (1 + \cos(t))\sin(t) \end{cases}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

3. Tracer la *strophoïde droite*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On prendra t dans un intervalle de $\mathbb{R}$ assez grand ; éventuellement on règlera à la main les limites de la fenêtre.

II.3 Suites

On souhaite maintenant représenter graphiquement une suite. On prendra pour exemple la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{1+2u_n}$. Si on sait mettre cette suite dans une liste `L`, alors il suffira d'appeler la fonction `plt.plot(X, L)` où `X` est obtenu à partir de `np.arange`, ce qui affichera en abscisse n et en ordonnée u_n ; c'est aussi le comportement par défaut si on écrit seulement `plt.plot(L)`.

Exercice 14.4

1. Écrire une fonction `suite(n)` qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite.

2. Représenter graphiquement la suite. On pourra configurer la couleur et le type de point, qu'on ne veut pas relier, par exemple avec le format `"+r"`.

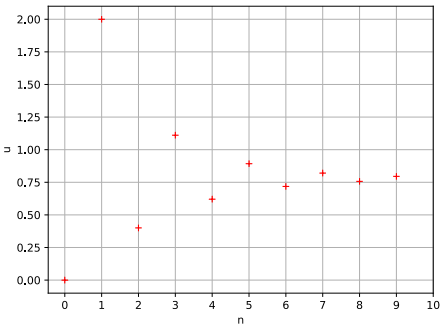


Figure 13. – La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mais on souhaite maintenant tracer le graphique en escalier (ou escargot, ou toile d'araignée) pour cette suite. Pour cela on a besoin de tracer sur un même graphique le graphe de la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{1+2x}$ ainsi que celui de $x \mapsto x$, sur l'intervalle disons $[0, 2]$. Observer que les points de l'escargot ont alternativement pour coordonnées (u_n, u_{n+1}) et (u_{n+1}, u_{n+1}).

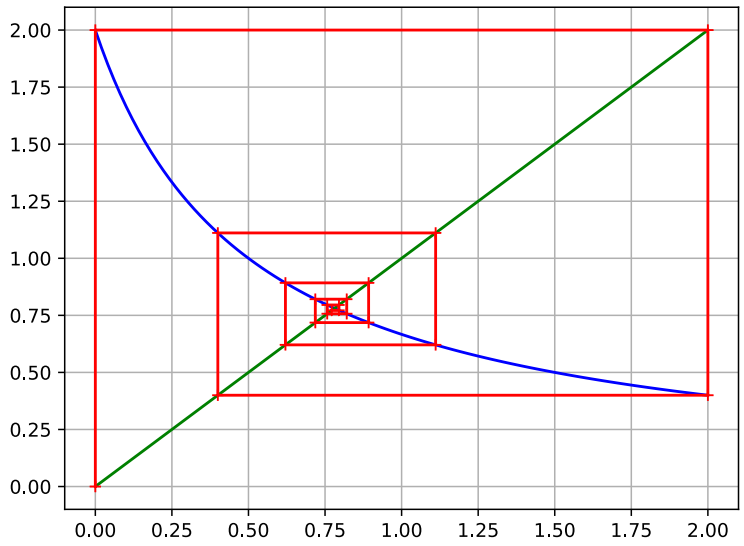


Figure 14. – La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en escargot.

Pour le tracer, il s'agit donc d'écrire une fonction `suite_escargot(n)` qui renvoie un couple `(U, V)` de deux listes, contenant les abscisses et les ordonnées des points successifs du graphique. On utilise plutôt des méthodes `append` pour former les deux listes en même temps : on écrit une boucle qui calcule les termes successifs de la suite avec une variable `u`, et à chaque passage dans la boucle, on calcule le terme suivant (on posera `v = 2 / (1 + 2*u)`) pour faire deux opérations `append` sur chacune des deux listes.

Exercice 14.5 (*)

1. Écrire la fonction `suite_escargot(n)`.
2. Tracer sur un même graphique la courbe de $x \mapsto f(x)$, la courbe de $x \mapsto x$, et l'escargot.

III Dériver et intégrer

III.1 Dériver

Rappelons la formule suivante :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Supposons maintenant que la fonction f est échantillonnée avec un tableau Numpy, c'est-à-dire qu'on dispose d'un tableau `X` d'abscisses et d'un tableau `Y` d'ordonnées. On veut échantillonner de même sa dérivée. Alors on approchera les quantités $f(x) - f(a)$, pour $x \to a$, par l'écart entre les valeurs les plus proches possibles `Y[i+1] - Y[i]`, qu'on divisera par l'écart `X[i+1] - X[i]`. On obtient un nouveau tableau `Z`, qu'on peut tracer en ordonnées par rapport à `X` pour visualiser la dérivée de f. Attention, ce `Z` est nécessairement de taille un de moins que `Y`…

Exercice 14.6

1. Écrire une fonction `derive(X, Y)` qui prend en argument deux tableaux supposés de même taille, représentant une fonction échantillonnée, et renvoyant un tableau `Z` de taille un de moins représentant la dérivée.
2. Bonus : pouvez-vous l'écrire *sans* boucle, mais uniquement avec les opérations vectorielles de Numpy ? *Indication : tranches.*

Pour tester :

Exercice 14.7
Pour les fonctions suivantes, tracer sur un même graphe la fonction f et sa dérivée (obtenue à l'aide de la fonction `derive`) :

1. $x \mapsto \arctan(x)$ pour $x \in [-3, 3]$,
2. $x \mapsto \sin(x)$ pour $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

III.2 Intégrer

Pour intégrer une fonction (« calculer l'aire sous la courbe ») f sur un intervalle $[a, b]$, on utilise la « méthode des rectangles à gauche » qui consiste à approximer l'aire sous f entre x et $x + h$, pour h très petit, par l'aire d'un rectangle de base h et de hauteur (à peu près constante) $f(x)$, c'est-à-dire le produit $h \times f(x)$. Si on suppose que f est échantillonnée par un tableau Numpy, d'abscisse `X` et d'ordonnée `Y`, alors il faut multiplier les écarts `X[i+1] - X[i]` par `Y[i]` et sommer tout cela.

Exercice 14.8
1. Écrire une fonction `integre(X, Y)`
2. Bonus : pouvez-vous l'écrire *sans* boucle, mais uniquement avec les opérations Numpy ? La fonction `np.sum(X)` calcule la somme de tous les éléments d'un tableau `X` ; on a aussi besoin des tranches…

Pour tester la fonction :

Exercice 14.9
1. (Mathématiques) Calculer l'intégrale suivante
$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
2. (Python) Donner une approximation de cette intégrale, avec la fonction `integre`, pour de plus en plus de points d'échantillonnage (on pourra écrire une fonction `integrale(n)` qui utilise n points).

IV Problème : diagramme de bifurcation

Le but est maintenant d'étudier le comportement de la suite $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$, en fonction d'un premier terme $u_0 \in [0, 1]$ et d'un nombre réel $r \in [0, 4]$. On pose $f_r : x \mapsto rx(1 - x)$.

Exercice 14.10 *Préliminaires*
1. Que se passe-t-il si $u_0 = 0$ ou si $u_0 = 1$?
2. Justifier que pour $r \in [0, 4]$ alors $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$. *Indication : étudier le maximum de $x \mapsto rx(1 - x)$.*
3. Écrire une fonction `escargot(r, u0, n)` qui trace tout le graphe en escargot, pour la valeur du paramètre r et la valeur de u_0 donnés, avec les n premiers termes de la suite.

On pourra en fait toujours prendre $u_0 = \frac{1}{2}$.

On suppose d'abord $0 \leqslant r \leqslant 1$: expérimenter le comportement de la suite pour diverses valeurs de r.

Exercice 14.11
Montrer que pour $0 \leqslant r \leqslant 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, quelque soit le terme u_0.

On suppose alors $1 \leqslant r$, expérimenter.

Exercice 14.12
1. Montrer que pour $1 \leqslant r \leqslant 4$, l'équation $f_r(x) = x$ admet une unique solution μ_r dans $[0, 1]$.

2. Montrer que pour $1 \leqslant r \leqslant 2$ et $u_0 \in [0, \mu_r]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique limite possible.

Pour des valeurs de r augmentant, on voit une unique limite, puis les termes alternent de part et d'autre en se rapprochant de *deux* limites différentes. Lorsque r augmente encore, on voit apparaitre encore plus de points limites possibles. Le **diagramme de bifurcation de la loi logistique** illustre, en fonction de r, le comportement de la suite pour n assez grand (autour de quelle(s) limite(s) la suite se rapproche).

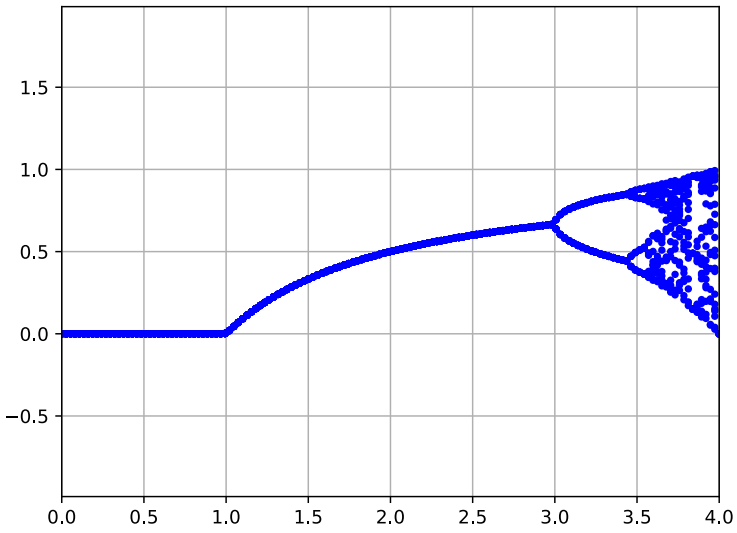


Figure 15. – Diagramme de bifurcation.

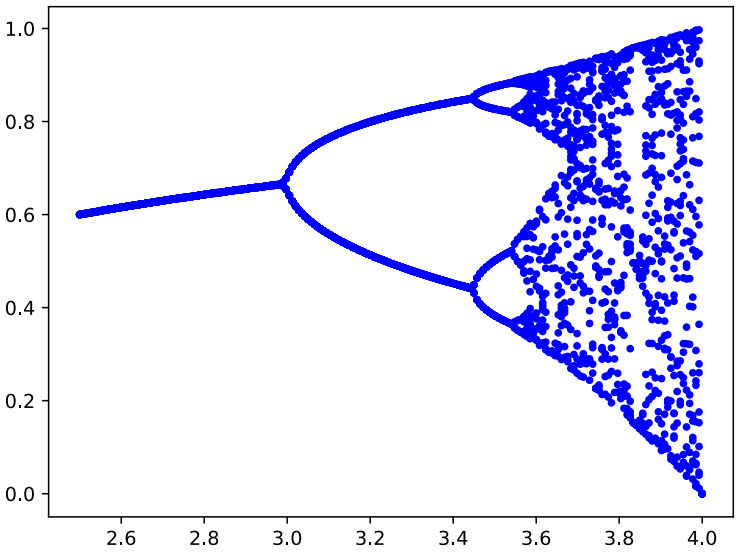


Figure 16. – Zoom sur la partie intéressante.

Ce dernier diagramme est obtenu en :
1. On échantillonne l'intervalle [2,5; 4] en 200 points avec `np.linspace`,
2. Pour chacun de ces points, on calcule les 200 premiers termes de la suite,
3. Puis les 20 termes suivants.

Ainsi sur chaque abscisse r de l'échantillonnage, on place en ordonnée un point pour chacun des 20 termes suivants de la suite. Si la suite converge, ces points seront très rapprochés ; mais si deux limites différentes apparaissent, les points vont se regrouper autour de deux gros points. On construit donc séparément des listes d'abscisses `X` et d'ordonnées `Y` avec des méthodes `append`.

Exercice 14.13 (*)
Tracer le diagramme de bifurcation.

Lorsqu'on voit apparaitre deux limites différentes (les termes d'indice pair se rapprochent de l'une, ceux d'indice impair se rapprochent de l'autre), ces deux limites sont des solutions de $f_r \circ f_r(x) = x$ *qui ne sont pas déjà solutions* de $f_r(x) = x$; elles apparaissent pour $r \geqslant 3$.

Exercice 14.14
Pour $r \geqslant 3$, tracer le graphe de la fonction $f_r \circ f_r$. Puis chercher avec un algorithme de dichotomie les solutions de $f_r \circ f_r(x) = x$ qui sont différentes de la solution déjà connue μ à $f_r(x) = x$.

V Annexe : tableaux à plusieurs dimensions

Le module `numpy` est aussi particulièrement efficace pour gérer des tableaux à plusieurs dimensions.

À deux dimensions, un tableau `X` est composé de lignes et de colonnes. On accède à l'élément de la ligne i et de la colonne j (tous les deux numérotés à partir de 0, comme d'habitude) avec la syntaxe `X[i, j]`. On peut par exemple en créer avec les syntaxes suivantes :

- `np.zeros` (idem avec `np.ones`) en lui donnant en argument un tuple (n, p) pour un tableau à n lignes et p colonnes :

```
>>> X = np.zeros((3, 5))
>>> print(X)
[[0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0. 0.]]
```

- Utiliser la méthode `reshape`, directement après la création du tableau, pour le remodeler selon les besoins :

```
>>> X = np.arange(24).reshape(4, 6)
>>> print(X)
[[ 0  1  2  3  4  5]
 [ 6  7  8  9 10 11]
 [12 13 14 15 16 17]
 [18 19 20 21 22 23]]
```

Pour un tel tableau, la variable `X.shape` est le tuple (n, p). Le nombre total de cases est exactement $n \times p$, qu'on obtient aussi avec la variable `X.size` (pour un tableau à une dimension, c'est la même chose que `len(X)`).

Le nombre de dimensions du tableau est appelé dans le vocabulaire Numpy le nombre d'**axes**. Un tableau à trois axes ressemble à un empilement de tableaux de dimension 2 et ses cases sont indicées par la syntaxe `X[i, j, k]`.

```
>>> X = np.arange(24).reshape(3, 2, 4)
>>> print(X)
[[[ 0  1  2  3]
  [ 4  5  6  7]]

 [[ 8  9 10 11]
  [12 13 14 15]]

 [[16 17 18 19]
  [20 21 22 23]]]
>>> X.shape
(3, 2, 4)
>>> X.size
24
```

Ici on a un empilement de 3 tableaux de chacun 2 lignes et 4 colonnes ; la forme est $(3, 2, 4)$ et la taille totale est bien $24 = 3 \times 2 \times 4$. Les éléments sont les `X[i, j, k]` pour $0 \leqslant i < 3$, $0 \leqslant j < 2$ et $0 \leqslant k < 4$.

Enfin, on peut trancher un tableau à plusieurs axes, indépendamment sur chaque axe, en séparant par des virgules les différents syntaxes de tranche :

```
>>> X = np.arange(24).reshape(4, 6)
>>> print(X)
[[ 0  1  2  3  4  5]
 [ 6  7  8  9 10 11]
 [12 13 14 15 16 17]
 [18 19 20 21 22 23]]
>>> print(X[:3, 1:4]) # lignes 0, 1, 2, colonnes 1, 2, 3
[[ 1  2  3]
 [ 7  8  9]
 [13 14 15]]
>>> print(X[:, :1]) # toutes les lignes, seulement la première colonne
[[ 0]
 [ 6]
 [12]
 [18]]
>>> print(X[:, 0]) # toutes les lignes, colonne 0
[ 0  6 12 18]
# presque pareil mais cette fois c'est un tableau à un seul axe
>>> print(X[:, ::-1]) # mêmes lignes, colonnes renversées
[[ 5  4  3  2  1  0]
 [11 10  9  8  7  6]
 [17 16 15 14 13 12]
 [23 22 21 20 19 18]]
```

Remarque. Il est intéressant de réfléchir au fait que toutes ces opérations (`reshape`, tranches) ne « bougent » rien dans la mémoire : les éléments d'un tableau à plusieurs dimensions restent toujours rangés les uns à la suite des autres, alignés sur une seule dimension, à des adresses mémoires consécutives. Ce qui change avec la forme du tableau, c'est seulement la façon de numéroter ces mêmes éléments. Observons par exemples les deux tableaux suivants :

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14

Dans les deux cas, il s'agit bien de cases de mémoire rangées consécutivement et numérotées de 0 à 14. Prenons par exemple l'élément numéroté 8 : c'est *parce que* le premier est de dimensions $(3, 5)$ que cet élément est en ligne 1 colonne 3, alors que dans le deuxième de dimensions $(5, 3)$ il est en ligne 2 colonne 2. De même, prenons par exemple la case $(2, 1)$, qui correspond à l'élément 11 dans le premier tableau mais à 7 dans le deuxième, ce que l'on peut savoir uniquement en connaissant leur forme. C'est toujours un petit jeu d'arithmétique qui permet de calculer, à partir de la connaissance de la taille et de la forme d'un tableau, à quelle adresse se situera l'élément en ligne i et colonne j ; ou réciproquement, étant donnés des éléments numérotés consécutivement en mémoire, de décider à quelle ligne et à quelle colonne correspond le n-ième élément.

Les opérations de tranches, elles aussi, ne tranchent rien du tout. Par exemple l'élément d'indice i de `X[1:]` est l'élément d'indice $i + 1$ de `X`, là encore il s'agit seulement de quelques manipulations arithmétiques cachées à l'utilisateur.

TP 15
Matrices

L'objectif de ce TP est tout simplement d'apprendre à manipuler des matrices en Python, à la fois les représenter et programmer quelques opérations usuelles dessus.

Nous avons déjà vu que la bibliothèque `numpy` permettait de traiter des tableaux de toute sorte, et s'applique donc aux matrices. En fait, toutes les fonctions que nous allons écrire ici se trouvent déjà intégrées dans `numpy` ainsi que dans son sous-module `numpy.linalg`, et il faudra continuer à apprendre à les utiliser, voir par exemple le Mémo Agro-Véto. Cependant pour notre apprentissage actuel nous allons prendre une autre approche et nous allons programmer toutes ces fonctions sans autre pré-requis que les listes Python.

I Préliminaires

I.1 Définir des matrices

Les matrices en Python seront enregistrées comme des **listes de listes** et plus précisément comme la **liste de leurs lignes**. Par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 7 & 4 \\ 6 & -2 & 5 & -3 \\ 7 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

sera représentée en Python par

```
A = [[8, -1, 7, 4], [6, -2, 5, -3], [7, 2, 0, 7]]
```

Cela est en quelque sorte une convention : on pourrait très bien décider de travailler en donnant la liste des colonnes. Mais cela est bien pratique ! En effet dans notre exemple `A[0]` désigne en fait le premier élément de la liste (de listes), donc la liste `[8, -1, 7, 4]`, et ainsi `A[0][0]` (c'est la même chose que s'il y avait des parenthèses : `(A[0])[0]`) est l'élément `8`, et `A[0][1]` est donc l'élément `-1` etc. De même `A[1]` est toute la deuxième ligne `[6, -2, 5, -3]` et donc `A[1][0] = 6`, `A[1][1] = -2`, `A[1][2] = 5`. Ainsi le coefficient d'indice (i, j) est `A[i][j]` à condition de, contrairement à la convention mathématique, numéroter les indices à partir de 0 !

Exercice 15.1
À partir de la fonction `len()`, comment obtient-on le nombre de lignes et de colonnes de la matrice `A` ? Écrire la fonction `taille(A)` qui renvoie un couple formé du nombre de lignes (toujours noté n) et du nombre de colonnes (toujours p).

Pour utiliser la fonction précédente, on pourra écrire des fonctions qui commencent par `(n, p) = taille(A)` ce qui récupère le tuple des dimensions de `A`. Le premier indice, qu'on appellera souvent i, sera l'indice des lignes et variera de 0 à $n-1$ (cela diffère de la convention mathématique mais pose peu de problèmes en pratique) et le deuxième indice, qu'on appellera souvent j, sera celui des colonnes et variera entre 0 et $p-1$.

I.2 Créer des nouvelles matrices

Nous aurons besoin de pouvoir créer des nouvelles matrices de taille donnée, et en particulier d'avoir une fonction `matrice_nulle(n, p)` qui crée une nouvelle matrice à n lignes et p colonnes remplie de zéros.

L'idée la plus simple pour créer par exemple une nouvelle matrice à 3 lignes et 4 colonnes serait d'écrire

```
>>> A = [[0] * 4] * 3
>>> print(A)
[[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]
```

ainsi les listes à l'intérieur sont de taille 4 remplies de zéros, et on les répète 3 fois.

Malheureusement, cela pose un petit problème…

```
>>> A[0][0] = -1
>>> print(A)
[[-1, 0, 0, 0], [-1, 0, 0, 0], [-1, 0, 0, 0]]
```

En fait, la syntaxe ci-dessus crée bien une ligne `[0] * 4` de zéros, puis ne recopie pas la ligne mais uniquement la **référence** à cette ligne. Les trois lignes de `A` deviennent des références à la **même** liste `[0, 0, 0, 0]`, ainsi toute modification sur une ligne provoque une modification sur l'autre ligne. L'auteur de ce TP s'est lui-même fait piéger lors de son apprentissage de Python.

La syntaxe des listes en compréhension, elle, permet toujours de créer des nouvelles listes. On utilisera donc la syntaxe

```
>>> A = [[0 for _ in range(4)] for _ in range(3)]
```

Ici, on crée une liste de quatre zéros (on dira « à l'intérieur »), et on répète cela trois fois. Les coefficients obtenus sont tous indépendants. Plus généralement, on **donne** la fonction suivante qui crée une matrice nulle de dimensions (n, p) :

```
def matrice_nulle(n, p):
    return [[0 for _ in range(p)] for _ in range(n)]
```

De même, on fera attention à ce qu'écrire `B = A` ne crée pas une copie de `A` mais copie seulement la référence, et toutes les modifications de `B` vont alors affecter `A`. Pour écrire nos fonctions ce n'est pas le comportement voulu, donc nous commençons toujours par créer une nouvelle matrice nulle toute fraiche (c'est à dire, sans références) que nous remplissons au fur et à mesure.

Enfin, rappelons que l'outil essentiel pour parcourir une matrice et effectuer une opération sur chaque coefficient est la double boucle. Une syntaxe telle que

```
for i in range(n):
    for j in range(p):
        ... A[i][j] ...
```

va parcourir les lignes et, pour chaque ligne, parcourir les colonnes. Si on échange les deux boucles on parcourt, pour chaque colonne, toutes les lignes. Dans la plupart des fonctions de la partie II cet ordre n'aura pas d'importance car les opérations doivent de toute façon être effectuées sur tous les coefficients.

II Exercices

Toutes les fonctions sont à compléter dans le fichier ci-joint. Elles commencent par récupérer la taille des matrices données en argument, éventuellement vérifier la compatibilité des tailles pour les opérations à effectuer, puis elles créent une *nouvelle* matrice pour contenir le résultat, et la remplissent peu à peu.

II.1 Créer des matrices

Exercice 15.2
Écrire la fonction `identité(n)` qui crée la matrice identité de taille n.

Exercice 15.3
Écrire la fonction `diagonale(L)` qui prend en argument une liste (simple) de coefficients et qui crée une matrice diagonale, en plaçant les coefficients donnés dans `L` sur la diagonale.

Par exemple, on veut que l'appel `diagonale([3, 5, 7])` produise la matrice $\begin{pmatrix} 3&0&0\\0&5&0\\0&0&7 \end{pmatrix}$.

II.2 Opérations sur les matrices

Exercice 15.4
Écrire la fonction `somme(A, B)` qui calcule la somme des matrices `A` et `B`.

Exercice 15.5
Écrire la fonction `produit_constante(A, a)` qui calcule la matrice aA (où a est un nombre réel et A est une matrice).

Exercice 15.6
1. Écrire la fonction `coeff_produit(A, B, i, j)` qui calcule le coefficient d'indice (i, j) du produit de matrices AB.
2. En déduire la fonction `produit(A, B)` qui calcule le produit de matrices AB.
3. Bonus : pouvez-vous, à l'aide d'une *triple* boucle, écrire directement la fonction `produit`, sans fonction intermédiaire ?

Exercice 15.7
Écrire la fonction `puissance(A, N)` qui calcule la puissance A^N (où N est un entier positif). On rappelle que A^0 est la matrice identité (de la même taille que A). On pourra choisir entre une méthode itérative et une méthode récursive…

Remarque. Ici plus encore, l'algorithme des puissances rapides (TP 10 : Récursivité, exercice 5) est particulièrement important ; on rappelle que celui-ci consiste à écrire $A^N = \left(A^{N/2}\right)^2$ si N est pair et $A^N = AA^{N-1}$ sinon, par exemple $A^8 = \left(\left(A^2\right)^2\right)^2$ se calcule avec seulement 3 multiplications de matrices. En effet un produit de matrices est toujours une opération lourde, nécessitant beaucoup de calculs de produits de coefficients entre eux puis de sommes, et les matrices utilisées pour modéliser finement des phénomènes physiques peuvent avoir des milliers de coefficients. Il est donc crucial de calculer des puissances en minimisant le nombre d'opérations de produits de matrices qu'on va effectuer.

II.3 Quelques tests

Exercice 15.8
Écrire une fonction `est_diagonale(A)` qui renvoie `True` si la matrice A est diagonale, et `False` sinon.

Exercice 15.9
Écrire une fonction `est_triangulaire_supérieure(A)` qui renvoie `True` si la matrice A est triangulaire supérieure, et `False` sinon.

III Le pivot de Gauss

L'objectif ultime serait d'écrire un programme capable de calculer l'inverse d'une matrice, ou du moins dans un premier temps d'échelonner une matrice en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss. On obtiendra le rang au passage.

Cela nécessite tout d'abord de programmer les opérations élémentaires. Pour pouvoir ré-utiliser facilement les fonctions, cette fois nous avons besoin qu'elles modifient la matrice passée en argument au lieu de créer une copie nouvelle.

Exercice 15.10
Écrire les fonctions suivantes, prenant en argument une matrice `A` et **qui modifient directement la matrice** (sans en créer une nouvelle) :

1. `échange(A, i, j)` : échange les lignes i et j de A (opération $L_i \leftrightarrow L_j$).
2. `combinaison(A, a, i, b, j)` : opération $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$.
3. `dilate(A, a, i)` : opération $L_i \leftarrow aL_i$.

Avant de passer à l'échelonnage, il reste une fonction manquante qu'on écrira à part : celle pour l'étape de recherche d'un pivot. On doit lui fixer des indices (r, j) pour qu'elle cherche un coefficient non-nul *dans la colonne et en dessous à partir* de ce coefficient. Si elle en trouve, alors on échangera toute la ligne pour la placer à l'indice r ; si elle n'en trouve pas, il faudra seulement passer à la colonne suivante. Il est donc important que la fonction renvoie l'objet spécial `None` si elle ne trouve pas de pivot **et** que celui qui utilise la fonction teste si le résultat est `None` ou sinon est un indice de ligne.

Exercice 15.11
Écrire une fonction `cherche_pivot(A, r, j)` qui cherche l'indice ligne d'un coefficient non-nul dans la colonne j et dans les lignes d'indice $i \geqslant r$ de A. Si elle en trouve un, elle renvoie l'indice de la ligne du pivot trouvé. Sinon, elle renvoie `None`.

Tout est prêt pour appliquer le pivot de Gauss !

Exercice 15.12 (*)
Écrire une fonction `échelonne(A)` qui échelonne la matrice A.

Le programme fonctionne avec une boucle principale `for` portant sur l'indice j des colonnes, mais en maintenant aussi un indice r des lignes. Ces deux indices ne jouent pas le même rôle : à chaque étape on va toujours passer à la colonne suivante, par contre, on va passer à la ligne d'en-dessous seulement si on a bel et bien trouvé un pivot. On doit donc appeler la fonction `cherche_pivot` sur la case (r, j). Une fois qu'on a trouvé le pivot, on effectue les opérations élémentaires « comme d'habitude » (échanger les lignes pour mettre le pivot en ligne r, puis l'utiliser pour annuler tous les coefficients en dessous) pour échelonner.

Autant que possible, on ne veut pas utiliser l'opération élémentaire de dilatation, mais seulement les combinaisons $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ pour annuler un coefficient sans utiliser de division. L'avantage est qu'on garde le plus possible des nombres entiers, sans faire intervenir de nombres à virgules flottantes.

À la fin si tout se passe bien la variable `r` contient en fait le rang de la matrice. On pourra, en plus de renvoyer la matrice échelonnée, utiliser `print` pour afficher le rang.

Enfin on en vient à la fonction finale pour inverser une matrice.

Exercice 15.13 (*)
Écrire une fonction `inverse(A)` qui renvoie l'inverse de la matrice A, dans le cas où A est carrée et inversible. On s'y prend de la façon suivante :

1. Au départ, on a besoin d'une matrice B qui est une copie de A (pour ne pas modifier A) ainsi que d'une matrice I est l'identité.
2. **Toutes** les opérations élémentaires seront effectuées en même temps sur B et sur I. À la fin B doit être transformée en identité et I sera la matrice inverse de A.
3. Dans un premier temps on échelonne exactement comme dans l'exercice précédent. Si tout se passe bien, on trouve un pivot à chaque étape, et à la fin la matrice B est échelonnée et le dernier coefficient en bas à droite est non-nul, le rang est bien égal à la taille n. Si ce n'est pas le cas on peut éventuellement s'arrêter là et renvoyer une erreur : la matrice n'est pas inversible. En même temps, à la fin la matrice I est triangulaire inférieure.
4. Ensuite il faut remonter, en partant d'en bas. On a donc un deuxième morceau de la fonction avec une nouvelle boucle, qui cette fois part de la fin. On utilise des opérations élémentaires $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ pour éliminer toute la colonne au-dessus du coefficient diagonal de B, partant d'en bas à droite, et ensuite avec

une dilatation on le met à 1 avec une dilatation. Encore une fois, ces opérations sont faites simultanément sur B et sur I. Ici il n'y a rien à « chercher », car les pivots sont déjà sur la diagonale et non-nuls.

5. À la fin il faut renvoyer la matrice I.

TP 16
Manipulation d'images

Nous allons maintenant apprendre à manipuler les images. Les possibilités sont très larges et, en un seul TP, nous n'aurons qu'un petit aperçu du sujet. C'est aussi une très bonne idée d'utiliser ces méthodes pour le TIPE !

La première chose à faire est de récupérer le fichier `materiel.zip`. Il contient, en plus de deux versions d'un fichier `.py` à compléter, une certaine bibliothèque de photos pour le TP. Ouvrir le fichier en version niveaux de gris (pour l'instant) et exécuter au moins les deux premières cellules. Si tout se passe bien, une image en noir et blanc s'affiche.

I Introduction

I.1 Représentation d'images

Une image en couleurs à n lignes et p colonnes est manipulée par l'ordinateur comme un tableau. Chaque case du tableau s'appelle un **pixel** et contient en fait trois nombres pour former une petite case de couleur : le premier indique l'intensité de la couleur rouge, le deuxième de la couleur vert, et le troisième de la couleur bleu. On parle de codage RGB (Red, Green, Blue, c'est de l'anglais *of course*). Comme cela est un peu compliqué **nous travaillons d'abord avec des images en niveau de gris** auquel cas chaque pixel est représenté par un simple nombre qui indique la luminosité du pixel.

Plus précisément, nous travaillons avec la bibliothèque `numpy` ainsi que `PIL`. Le code préparé charge une image avec `PIL` dont le nom est donné dans la variable `fichier` puis forme un tableau Numpy nommé `image` à deux dimensions, la première correspondant aux lignes et la seconde aux colonnes. Chaque pixel est codé sur un octet, soit 8 bits. Cela donne 256 valeurs possibles, tous les entiers entre 0 et 255. Ainsi la valeur de `image[i, j]` est 0 si le pixel de la ligne i colonne j est tout noir, 255 si le pixel est tout blanc, et les valeurs intermédiaires correspondent à des niveaux de gris. Le type des données du tableau est `uint8` (entier, sans signe, sur 8 bits).

Tout comme pour les matrices, si l'image a n lignes et p colonnes alors les lignes sont numérotées de 0 à $n-1$, les colonnes de 0 à $p-1$, le pixel $(0,0)$ est le plus en haut à gauche et $(n-1,p-1)$ le plus en bas à droite. Avec la syntaxe Numpy le pixel d'indice (i,j) est `image[i, j]` ce qui est plus simple que `image[i][j]` que nous avons vu avec des listes de listes.

`X[0, 0]`	`X[0, 1]`	⋯	`X[0, p-1]`
`X[1, 0]`	`X[1, 1]`	⋯	`X[1, p-1]`
⋮	⋮	⋱	⋮
`X[n-1, 0]`	`X[n-1, 1]`	⋯	`X[n-1, p-1]`

Si on travaillait avec des couleurs, alors la variable `image` serait un tableau à *trois* dimensions, `image[i, j, 0]` serait l'intensité du rouge dans le pixel (i,j), `image[i, j, 1]` l'intensité du vert et `image[i, j, 2]` du bleu. Cela complique pas mal le traitement — en fait pas tant que cela si on sait bien utiliser `numpy`, mais passons pour l'instant. Enfin `image.shape` est un tuple de longueur 2 (sans couleurs) ou 3 (couleurs) et dans tous les cas `image.shape[0]` est le nombre de lignes et `image.shape[1]` le nombre de colonnes. La fonction `np.zeros((n, p))` (noir et blanc) ou `np.zeros((n, p, 3))` (couleurs) est donc utilisée pour créer une image vierge de n lignes et p colonnes remplie de zéros, c'est à dire une image toute noire.

Vérifiez cela à tout moment après avoir chargé l'image :

```
>>> image
>>> image.shape
>>> image.dtype
```

Remarque. Il existe aussi des images où chaque pixel contient *quatre* nombres : en plus des composantes RGB la dernière se nomme *canal alpha* et correspond à un niveau de transparence.

I.2 Échantillon de photos

Le dossier contient également un certain échantillon d'images. Vous pouvez choisir celle que vous voulez, idéalement en gardant la même pour toute la durée du TP (mais on pourra à n'importe quel moment copier-coller le code de chargement d'image pour tester avec d'autres). Les images sélectionnées réunissent quelques critères : elles sont redimensionnées à une taille raisonnable (environ 300 pixels de côté) alors qu'une image directement sortie d'une caméra moderne va contenir des millions de pixels et le programme sera lent à les traiter ; on apprécie aussi d'avoir un objet ou paysage qui se détache nettement du décor, y compris en noir et blanc.

Avertissement

Quelques avertissements préalables. **Utiliser une image trouvée sur internet pour un travail scolaire ou universitaire, ou pour la rediffuser, sans en avoir l'autorisation est considéré comme une faute grave**. Il est donc nécessaire de s'intéresser aux droits de l'image, et de faire un usage strictement privé des images trouvées.

Les images présentes sur Wikipedia par exemple ont souvent une licence qui autorise à les ré-utiliser, voire les modifier, et les rediffuser (licence Creative Commons faites pour encourager le partage) mais toujours en **citant proprement la source** de la photo. Autant que possible, dans vos travaux, utilisez vos propres photos et créez vous-même vos propres illustrations, et même si elles ne sont pas aussi belles cela sera certainement valorisé et valorisant !

Avertissement

Les photos proposées ici sont des photos personnelles et **l'autorisation vous est donnée de les utiliser pour ce TP, mais pas de les rediffuser librement**.

I.3 Fonctionnement global

Comme dans le TP sur les matrices, les fonctions ne doivent pas modifier l'image passée en argument mais faire soit une copie soit une nouvelle image vierge. Ensuite, c'est le mécanisme de la double boucle `for` qui permet d'effectuer une opération sur chaque pixel, un par un. Dans toutes les fonctions l'image passée en argument s'appelle `X` et l'image renvoyée s'appelle `Y`. La variable `image` est globale pour tout le fichier, et si on veut changer d'image, il faut soit ré-exécuter toute la cellule qui charge `image`, soit recopier le code là où on en a besoin. Enfin quelques autres fonctions déjà prêtes permettent d'afficher l'image, voire d'en afficher deux l'une sur l'autre pour bien les comparer, et de sauvegarder le résultat. À vous de le tester.

Un dernier petit avertissement : les opérations sur les coefficients se font dans des entiers non-signés 8 bits, sur lesquels les valeurs au-delà de 255 reviennent à 0. Cela force parfois à tester avant un calcul si le résultat va dépasser ou non 255.

II Forme de l'image

Les premières fonctions que l'on veut coder sont le miroir horizontal et le pivotement de 90 degrés vers la droite.

La question qu'il faut se poser au brouillon est : si on prend une image `X` et qu'on veut en former l'image miroir `Y`, alors quel pixel de `X` va dans le pixel de coordonnées (i, j) de `Y` ? Vérifier au brouillon que c'est bien celui de coordonnées $(i, p-1-j)$, qui est sur la même ligne, mais sur la colonne symétrique par rapport à la verticale.

Exercice 16.1
Écrire la fonction `miroir(X)` qui renvoie une image obtenue à partir de `X` par miroir horizontal.

On poursuit avec la fonction qui pivote de 90 degrés vers la droite. Là encore il s'agit d'abord de trouver au brouillon : quel pixel de `X` va aller dans `Y[i, j]` ? On prendra garde aux dimensions de `Y` cette fois ! La réponse est la bonne combinaison des i, j, $n-1-i$, $p-1-j$.

Exercice 16.2
Écrire la fonction `pivote(X)` qui retourne une image obtenue à partir de `X` par rotation de 90 degrés sur la droite.

III Éclairage

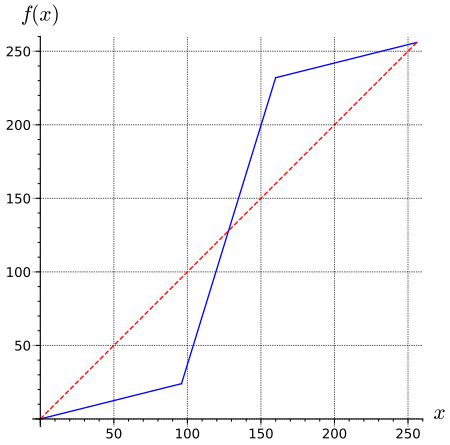
Pour augmenter l'éclaircissement d'une image, il suffit d'ajouter à chaque pixel une valeur fixe, par exemple 50 (l'effet sera bien visible, mais on pourra ajuster cette valeur plus tard). En effet la luminosité d'un pixel est un nombre entre 0 et 255, donc les augmenter tous de la même façon ne pourra qu'augmenter la luminosité de l'image. Attention, il ne faut pas seulement ajouter 50 : si le résultat de l'addition dépasse 255 (la luminosité maximale d'un pixel), on laissera le résultat à 255. En général, on donne une valeur fixe de décalage b et on veut augmenter tous les pixels de la valeur b.

Exercice 16.3
Écrire la fonction `eclaircit(X, b)` qui éclaircit l'image `X` en augmentant tous les pixels de la valeur `b`.

Une autre opération intéressante et très simple à programmer est le **seuillage**. Il s'agit de fixer une valeur s de seuil (typiquement $s = 127$ pour commencer) et de remplacer les pixels soit par 0 (une case noire) si la valeur est inférieure à s, soit par 255 (case blanche) si la valeur est supérieure à s. Cela doit plus ou moins faire apparaitre des formes, surtout sur les objets sombres se détachant bien d'un fond clair. Tester la fonction avec différentes valeurs du seuil.

Exercice 16.4
Écrire la fonction `seuillage(X, s)` qui effectue cette opération, avec le seuil `s`, et tester avec différentes valeurs du seuil.

Le seuillage est un cas simplifié de l'opération de changer le contraste. Augmenter le contraste, c'est augmenter la luminosité sur les pixels déjà bien lumineux, et diminuer la luminosité de ceux déjà sombres. Pour cela, on a besoin d'une fonction $f : [0, 255] \to [0, 255]$ qui tasse les petites valeurs vers 0 ainsi que les grandes valeurs vers 255 (si x est petit alors $f(x) < x$, si x est grand alors $f(x) > x$), une fonction dont le graphe ressemble à ceci :



On propose pour cela la fonction

$$f : [0, 255] \longrightarrow [0, 255]$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leqslant x < 96 \\ 24 + \frac{13}{4}(x - 96) & \text{si } 96 \leqslant x < 160 \\ 232 + \frac{1}{4}(x - 160) & \text{si } 160 \leqslant x \leqslant 255 \end{cases}$$

Vérifiez qu'il s'agit bien d'une fonction *continue* avec le comportement voulu. Il s'agit d'une fonction *affine par morceaux*.

Remarque. Il est facile de produire de tels exemples en décidant par quels points le graphe passe, ou avec quel pente : un morceau de fonction affine est défini uniquement par deux points de passage, ou bien par un point et une pente. Ici f est la seule fonction possible découpant l'intervalle $[0, 255]$ en trois morceaux de tailles 96, 64, 96 (soit les fractions 3/8, 1/4, 3/8 de 255) avec les pentes 1/4 au début et à la fin.

Exercice 16.5
Écrire la fonction `contraste(X)` qui augmente le contraste de l'image `X` selon le procédé décrit.

Enfin pour obtenir le négatif d'une image, c'est comme son nom l'indique une simple inversion entre les pixels lumineux et les pixels sombres : la luminosité x d'un pixel deviendra $255 - x$ dans l'image négative.

Exercice 16.6
Écrire la fonction `negatif(X)` qui donne le négatif de l'image `X` selon ce procédé.

IV Flou

On se propose de flouter une image. L'idée est la suivante : chaque pixel sera remplacé par une moyenne des pixels autour de lui, mais pas n'importe comment. On utilisera un coefficient pour que les pixels plus proches comptent plus. La règle simple à programmer qu'on propose est : un pixel lui-même compte avec un coefficient 3, les quatre pixels sur ses côtés comptent avec un coefficient 2 et les quatre pixels qui le touchent en diagonale comptent avec un coefficient 1. Le total des coefficients fait donc 15. On représente cette opération par le tableau :

`X[i-1, j-1]`	`X[i-1, j]`	`X[i-1, j+1]`
`X[i, j-1]`	`X[i, j]`	`X[i, j+1]`
`X[i+1, j-1]`	`X[i+1, j]`	`X[i+1, j+1]`

1	2	1
2	3	2
1	2	1

Avec cette méthode on ne peut pas traiter correctement les pixels sur les bords, ceux pour lesquels il n'y a pas de pixel voisin à gauche par exemple. Dans un premier temps on n'y touche pas, l'image `Y` est initialisée à une copie de `X` et donc les pixels sur les bords ne sont pas changés (cela ne se voit en général pas à l'œil nu). Si on est courageux, la seule façon naturelle est de tronquer ce tableau mais alors il faut distinguer des cas selon la position du pixel de bord. Par exemple si le pixel est sur le bord gauche mais pas dans les coins, il faut prendre la moyenne sur le pixel de droite, les deux au-dessus, et les deux diagonales haut-droite et bas-droite. Le total des coefficients est de 11. Reprendre ce procédé pour chacun des 4 bords *et* chacun des 4 coins.

Exercice 16.7
Écrire la fonction `flou(X)` qui floute l'image `X` selon ce procédé. On ne se préoccupera pas tout de suite des bords.

Remarque. De nombreuses fonctions différentes de flous peuvent être obtenues en considérant une moyenne d'un plus grand nombre de pixels autour du pixel central, et en faisant varier les coefficients. L'idée est que plus on considère une moyenne sur un grand nombre de pixels, plus l'effet de flou sera fort. Un cas connu des graphistes est le **flou gaussien** dans lequel les poids accordés aux pixels voisins suivent une loi gaussienne en fonction de la distance au pixel central. Ainsi plus la gaussienne est large, plus les pixels voisins considérés dans le calcul de la moyenne sont nombreux, et plus l'effet de flou est fort. Au contraire si la gaussienne est très resserrée alors le pixel central garde beaucoup plus d'importance que les autres et le flou est léger. Tous ces flous font partie des **flous linéaires**, et la donnée de tous les coefficients pour les pixels voisins est appelée **matrice de convolution** ; l'opération de convolution consiste à remplacer un pixel par la moyenne des pixels voisins avec des coefficients donnés par la matrice.

IV.1 Contours

On s'intéresse maintenant au problème de la **détection de contours**. Il s'agit en quelque sorte de l'inverse du flou : quand deux pixels voisins ont des intensités différentes on veut accentuer cette différence, alors qu'en prenant la moyenne le flou va réduire cette différence. Et si deux pixels voisins ont des intensités déjà proches,

on considère qu'il n'y a pas de contour du tout. On commence donc par calculer la moyenne pondérée des pixels voisins selon la règle suivante :

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

Si les pixels d'une zone ont des intensités proches, cette moyenne va être proche de zéro. Au contraire, la valeur va être très élevée si le pixel central a une intensité nettement différente de celle de ses voisins. On choisit donc une valeur de seuil, et si la moyenne (en valeur absolue) dépasse le seuil on mettra le pixel à 0 (tout noir) et sinon à 255 (tout blanc).

Exercice 16.8
Écrire la fonction `contours(X, s)` qui renvoie une image en noir et blanc (seulement les couleurs 0 et 255) détectant les contours de l'image `X` avec le seuil donné `s`. Il est nécessaire de tester manuellement avec différents seuils.

Remarque. En pratique, une détection automatique de contours capable de reconnaitre des formes et de les mesurer précisément se fait en de nombreuses étapes : d'abord un éventuel pré-traitement pour lisser l'image, puis une détection des contours comme ici, éventuellement avec un seuil qui s'ajuste automatiquement selon la proportion des pixels qu'on veut garder ; puis éventuellement un post-traitement pour délimiter bien précisément des contours et des zones, et enfin on peut marquer nettement les régions dessinées.

V Mettez de la couleur dans votre vie !

Le fichier à compléter se trouve dans une autre variante pour traiter les images en couleur. La variable `image` est un tableau `numpy` de forme $(n, p, 3)$.

Normalement il faudrait une triple boucle pour traiter uns par uns tous les pixels sur n lignes, p colonnes et 3 composantes couleurs, n'est-ce pas ?

Mais en fait, dans ce cas alors pour chaque indice (i, j), `image[i, j]` est considéré comme un tableau de taille 3. Ainsi les opérations que nous effectuons sur des pixels — par exemple la fonction d'éclairage qui ajoute b à chaque pixel — se fait sur `image[i, j]` *en tant qu'opération vectorielle* et donc sur chacune de ses 3 composantes, et donc elle ajoute b dans chaque couleur de chaque pixel. Cette fonction (du moins sans le test pour vérifier si la valeur dépasse 255) marche donc exactement de la même façon en couleurs. C'est aussi le cas du miroir, puisque l'opération `Y[i, j] = X[i, p-1-j]` copie le tableau de taille 3 de `X` vers `Y`. Et du négatif, qu'on peut en fait écrire en une seule ligne `Y = 255 - X`. Quant au flou, l'opération de moyenne des pixels voisins est effectuée elle aussi de façon vectorielle dans chacune des 3 composantes couleurs.

Exercice 16.9
Tester et éventuellement adapter les fonctions précédentes en couleur.

Une fonction à adapter cette fois-ci dans les trois couleurs :

Exercice 16.10
Écrire une fonction `seuillage(X, a, b, c)` qui effectue un seuillage séparément sur chacune des couleurs : dans le rouge, l'intensité du la couleur sera comparée à a et le pixel sera mis soit à 0 (noir) soit à 255 (rouge pur), de même b sera le seuil de vert et c le seuil de bleu. À la fin l'image est constituée uniquement de noir, de blanc, rouge pur, vert pur, bleu pur, et des combinaisons de ces couleurs.

Enfin la dernière opération est amusante, testez-là sur diverses images !

Exercice 16.11
Écrire une fonction `fusion(X1, X2)` qui fusionne les deux images, c'est à dire que chaque pixel (i, j) du résultat sera la moyenne des pixels (i, j) de chacune des deux images. Cela nécessite que les deux images soient exactement de la même taille.

Puis tester avec deux images choisies parmi celles proposées, en recopiant deux fois le code qui permet d'ouvrir un fichier image.

VI Pour aller plus loin

Quelques pistes d'améliorations à tester vous-même :

1. Vérifier que toutes les fonctions marchent bien en couleur, et les corriger s'il faut.
2. Vérifier avec plusieurs images différentes, éventuellement avec vos propres images.
3. Sauvegarder son image en l'enregistrant, avec les fonctions déjà écrites dans le fichier joint qui font appel à `PIL.Image.fromarray` (convertit le tableau Numpy en image) et `PIL.Image.save` (enregistre un fichier image).
4. *Vectorialiser* les opérations en utilisant toute la puissance de Numpy pour que l'exécution soit plus rapide, c'est à dire éliminer totalement les doubles boucles mais raisonner avec les opérations vectorielles. Sans vectorialisation, certaines fonctions seront bien trop lentes sur des images de grande taille.

TP 17
Traitement de données en tables

C'est bientôt la Saint-Valentin ! Quoi de plus romantique que d'écrire un programme Python pour manipuler la base de données de tous les prénoms des nouveaux-nés donnés en France et déclarés à l'état civil entre 2000 et 2009 ?

I Introduction

Le fichier `materiel.zip` contient un fichier `prenoms.csv` avec toute l'information dont nous avons besoin. Dans sa forme actuelle il contient 110 605 lignes, et on peut l'ouvrir avec un éditeur de texte même si cela est difficile pour travailler. Les premières lignes du fichier sont les suivantes :

```
"sexe","prenom","annee","nombre"
1,AARON,2000,118
1,ABBAS,2000,7
1,ABD,2000,6
1,ABD-ALLAH,2000,6
1,ABDALLAH,2000,68
1,ABDEL,2000,65
...
2,EMMA,2004,6634
2,EMMA-JANE,2004,3
2,EMMA-LISA,2004,4
2,EMMA-LOU,2004,10
2,EMMA-LOUISE,2004,4
2,EMMA-ROSE,2004,5
2,EMMANUELA,2004,5
2,EMMANUELLA,2004,21
2,EMMANUELLE,2004,219
...
```

Cela représente un tableau à quatre colonnes, comme leur nom l'indique. La colonne `sexe` vaut en fait 1 pour les garçons et 2 pour les filles (le fichier ne connait pas d'autre genre), la colonne `prenom` est en majuscule, la colonne `annee` est l'année de naissance et la colonne `nombre` le nombre de naissances avec ce prénom cette année.

Le fichier est ordonné avec d'abord les naissances de garçons de l'année 2000, puis les filles de 2000, puis les garçons de 2001, etc. Dans chacune de ces catégories, les prénoms sont classés par ordre alphabétique. Mais tout cela aura peu d'importance en pratique car nous traiterons le fichier à travers des boucles en Python ; il faut seulement se préoccuper du fait qu'un même prénom va revenir plusieurs fois, chaque année, éventuellement pour plusieurs sexes.

Il s'agit d'un **fichier CSV**, qui permet de représenter un tableau ou une base de données à la structure très simple, facile à traiter par l'ordinateur et dans une certaine mesure lisible par un humain : des colonnes décrites dans une en-tête, et dans chaque ligne les données correspondantes sont séparées par des virgules. Le mot CSV lui-même signifie *Comma-Separated Values* soit littéralement… « valeurs séparées par des virgules ». On ne s'est pas pris la tête pour trouver un nom ! On appellera chaque ligne une **entrée** de la **table** — ne pas confondre un *prénom* avec l'*entrée toute entière*.

Le code Python de démarrage ne fait qu'ouvrir ce fichier en utilisant la bibliothèque `csv` et le charge dans une grosse liste nommée `liste` :

```
>>> len(liste)
110604
```

La longueur est exactement un de moins que le nombre de lignes du fichier, à cause de l'en-tête.

Affichons un extrait en vrac de cette liste : par exemple, tout entre les indices 30 000 et 40 000 mais en sautant avec des pas de 1000 ce qui devrait afficher 10 prénoms :

```
>>> liste[30000:40000:1000]
[{'sexe': '1', 'prenom': 'DAVIDSON', 'annee': '2003', 'nombre': '4'},
 {'sexe': '1', 'prenom': 'IRWIN', 'annee': '2003', 'nombre': '8'},
 {'sexe': '1', 'prenom': 'MARVIN', 'annee': '2003', 'nombre': '334'},
 {'sexe': '1', 'prenom': 'SAMET', 'annee': '2003', 'nombre': '37'},
 {'sexe': '2', 'prenom': 'AIMY', 'annee': '2003', 'nombre': '33'},
 {'sexe': '2', 'prenom': 'CYNTHIA', 'annee': '2003', 'nombre': '245'},
 {'sexe': '2', 'prenom': 'IRENA', 'annee': '2003', 'nombre': '13'},
 {'sexe': '2', 'prenom': 'LYANE', 'annee': '2003', 'nombre': '9'},
 {'sexe': '2', 'prenom': 'NOALIE', 'annee': '2003', 'nombre': '3'},
 {'sexe': '2', 'prenom': 'SWANA', 'annee': '2003', 'nombre': '3'}]
```

Comme chaque prénom a droit à sa propre entrée, une grande partie de cette liste est composée de prénoms rares, et toutes les variantes orthographiques ont aussi leur propre entrée ; les prénoms courant apparaissent une seule fois, mais avec une grande valeur pour la colonne `nombre`.

Chaque entrée de cette liste est nommée en Python un **dictionnaire** — nous y reviendrons dans un TP à part entière. Écrivons par exemple

```
>>> x = liste[46090]
>>> print(x)
{'sexe': '2', 'prenom': 'EMMA', 'annee': '2004', 'nombre': '6634'}
```

alors on accède au prénom correspondant par `x["prenom"]`, à l'année par `x["annee"]` et de même pour les deux autres colonnes :

```
>>> x["sexe"]
'2'
>>> x["prenom"]
'EMMA'
>>> x["annee"]
'2004'
>>> x["nombre"]
'6634'
```

Cela se passe comme si chaque entrée était une petite liste, dont les indices ne sont pas des nombres mais sont les noms des colonnes avec lesquelles nous travaillons.

```
>>> x = liste[46090]
>>> print(x)
{'sexe': '2', 'prenom': 'EMMA', 'annee': '2004', 'nombre': '6634'}
```

En fait on traitera tout le sujet en itérant directement sur la liste `for x in liste` car il ne sera pas nécessaire de connaitre l'indice du prénom dans la liste totale. Cela simplifie aussi les notations.

Quelques dernières remarques :

- Respectez les majuscules et les accents, dans les prénoms comme dans les intitulés de nos colonnes, cela a son importance. De plus, chaque orthographe correspond à une entrée différente. Les noms des colonnes sont en minuscule et sans accents. Les prénoms sont tous en majuscule, parfois avec accent et parfois sans. Seuls les prénoms avec au moins 3 naissances apparaissent.
- Toutes les données présentes sont des chaînes de caractères, de type `str`, y compris quand cela représente des nombres entiers. Pour accéder au nombre correspondant au prénom `x` il faut donc écrire `int(x["nombre"])`. Quant aux années, tant qu'on ne fait pas de calculs dessus, on peut les garder de type `str`, mais alors quand on donne une année il faut bien la mettre entre guillemets. Ainsi il faudra écrire des choses telles que `if x["annee"] == "2006"`. Le sexe lui est soit `"1"` soit `"2"`.

- De nombreuses fonctions cherchent des prénoms en filtrant selon la valeur de `annee` ou de `sexe`. Ce n'est pas une très grosse contrainte (on pourrait enlever ces filtres), car cela revient à ajouter des conditions `if` dans les boucles.

II Explorer et compter

Au tout début nous explorons le fichier et ce qu'il contient.

Exercice 17.1
Écrire une fonction `cherche(prenom)` qui prend en argument un prénom, parcourt toute la liste, et si le prénom est trouvé, affiche toute l'entrée correspondante.

Testez-la sur votre prénom, bien entendu, et observez un peu la liste.

Exercice 17.2
Écrire une fonction `nombre(prenom, annee, sexe)` qui prend en argument un prénom, une année et un sexe, et qui si elle trouve le prénom dans la liste, renvoie le nombre de fois où il a été donné.

Exercice 17.3
Écrire une fonction `nombre_prenoms(annee, sexe)` qui compte le nombre total de prénoms donnés pour l'année et le sexe données.

Maintenant il faut compter en utilisant la colonne `nombre`. Attention à bien convertir en `int` les valeurs lues !

Exercice 17.4
Écrire une fonction `total_prenom(prenom)` qui prend en argument un prénom et renvoie le nombre de fois où il a été donné, sur toutes les années et éventuellement sur les deux sexes (c'est le nombre de personnes portant ce prénom).

Exercice 17.5
Écrire une fonction `total_naissances(annee, sexe)` qui prend en argument une année, et qui renvoie le nombre total d'enfants nés, sur l'année et le sexe donné.

III Représenter graphiquement

La fonction `plt.bar(X, Y)` de la bibliothèque `matplotlib.pyplot` permet de tracer un diagramme en barres qui sera bien adapté à afficher le nombre de fois qu'un prénom a été donné chaque année. La liste `X` sera celle des années à mettre en abscisses (dans un diagramme en barres, cela peut être des valeurs numériques ou bien des mots quelconques) et la liste `Y` sera celle des nombres de naissances. La documentation ou les aide-mémoires de Matplotlib permettent d'améliorer un peu l'aspect du graphique : titre avec `plt.title()`, noms des axes avec `plt.xlabel()` et `plt.ylabel()`, couleurs des barres etc.

Il faut donc créer une liste indiquant combien de fois le prénom a été donné, chaque année.

Exercice 17.6
1. Écrire une fonction `liste_nombres(prenom, sexe)` qui renvoie une liste `L` où `L[i]` est le nombre de fois où le prénom a été donné l'année $2000 + i$, par sexe donné.
2. Écrire une fonction `barre(prenom, sexe)` qui affiche un diagramme en barres du nombre de fois qu'un prénom a été donné en fonction de l'année, avec le sexe donné.

IV Filtrer

Les premières questions sont une simple révision.

Exercice 17.7
1. Écrire une fonction `maximum(annee, sexe)` qui renvoie le prénom (on a besoin de l'entrée complète) le plus donné, par année et par sexe.
2. Écrire une fonction `prenoms_au_moins(seuil, annee, sexe)` qui renvoie la liste de tous les prénoms (les entrées complètes) qui sont donnés au moins autant de fois que la valeur `seuil` passée en argument, par année et par sexe.
3. Écrire une fonction `maximum2(annee, sexe)` qui renvoie le couple formé des deux prénoms les plus donnés.

Notre but serait d'avoir le TOP 10 des prénoms les plus donnés, par année et par sexe. En général ce n'est pas très simple à programmer, pas beaucoup plus simple que les algorithmes de tri. Nous allons nous inspirer du tri par insertion, et de la fonction `maximum2` précédente : on itère sur la liste de tous les prénoms en maintenant une autre liste `L` des 10 prénoms (il faut les entrées complètes) les plus donnés jusque là, et si on trouve un prénom qui apparait plus de fois qu'un de ceux de `L`, on le remplace dans `L`. Au départ, éventuellement, la liste `L` est égale à `[None] * 10`.

Exercice 17.8 (*)
1. Écrire une fonction `insere(L, x)` qui prend en argument une liste `L` (on suppose qu'elle ne contient que 10 entrées complètes de prénoms, ou éventuellement des valeurs spéciales `None`), et une entrée `x`, et qui remplace une des entrées de `L` par `x` si `x` est plus donné que cette entrée.
2. En déduire une fonction `top10(annee, sexe)` qui renvoie la liste du TOP 10 des prénoms les plus donnés, sur l'année et le sexe.

V Choisir le prénom

On s'intéresse enfin au choix du prénom au hasard. Dans cette section on ne s'occupe pas des années ni des sexes (mais on peut toujours le rajouter ensuite). La fonction `randint(a, b)`, du module `random`, donne un nombre aléatoire entre les bornes a et b (bornes incluses).

Mais on ne veut pas simplement choisir une entrée de la liste au hasard : on voudrait choisir un prénom de façon proportionnelle à sa fréquence d'apparition. Cela nécessite donc d'abord de compter le nombre de naissances totales, appelons le N. Ensuite on tire au hasard un nombre entre 1 et N. L'idée à traduire dans un algorithme, qui parcourt toute la liste est la suivante…

Imaginons qu'un premier prénom soit donné 3 fois, un deuxième est donné 8 fois, et le dernier est donné 2 fois. Cela fait 15 naissances, on prend un nombre au hasard entre 1 et 15. Alors on veut choisir le premier prénom si le nombre tiré est $1, 2, 3$, le deuxième si le nombre tiré est entre 4 et 12, et le troisième si le nombre tiré est $13, 14, 15$. Autrement dit dans une boucle on a besoin de compter les cumuls de naissances, et comparer le cumul avec le nombre tiré au hasard : dès que le cumul dépasse notre nombre choisi, on s'arrête et on considère qu'on choisit ce prénom !

Exercice 17.9
1. Écrire une fonction `choix_prenom()` qui choisit un prénom au hasard par cette méthode, et renvoie le prénom.
2. Écrire une fonction `choix_groupe(n)` qui renvoie une liste de n prénoms choisis au hasard selon cette méthode, et observez par exemple en générant toute une classe de 30 élèves !

Il n'est pas difficile de modifier la méthode précédente pour générer uniquement un prénom rare, où rare signifie par exemple donné moins de 10 fois (le seuil est au choix). Cette fois, peu importe que la probabilité soit proportionnelle à la fréquence, mais il faut bien compter à l'avance les prénoms rares.

Exercice 17.10
Écrire la fonction `choix_prenom_rare(seuil)`, et créer une liste de 30 prénoms rares, donnés moins de `seuil` fois.

TP 18
Dictionnaires

Les **dictionnaires** sont un nouveau type permettant de contenir d'autres données, comme les listes ou les tuples. Nous en avons en fait déjà croisés au TP précédent et nous allons approfondir.

I Introduction

Lorsque nous avons écrit dans le TP précédent

```
d = {"sexe": "2", "prenom": "EMMA", "annee": "2004", "nombre": "6634"}
```

nous avions déjà affaire à un dictionnaire. Ce qu'on nomme en Python **dictionnaire** est un ensemble de **valeurs** auxquelles on accède via les **clés**. Ici les clés sont les noms `"sexe"`, `"prenom"`, `"annee"`, `"nombre"`. Les valeurs correspondantes sont obtenues avec la syntaxe `d["sexe"]`, `d["prenom"]` etc.

Cela ressemble donc fort à une liste dans laquelle les indices ne sont pas seulement des nombres entiers, mais peuvent être des chaines de caractères. On les appelle aussi parfois des *tableaux associatifs*, car ils associent une valeur à la clé donnée. Et ils ont des applications bien pratiques.

Quelques remarques sur le fonctionnement des dictionnaires :
- L'ordre des clés n'a pas vraiment d'importance.
- Bien sûr, chaque clé ne peut apparaitre qu'une seule fois, sinon cela n'a pas de sens.
- Les clés peuvent être en fait de beaucoup de types différents : chaines de caractères, mais aussi entiers, flottants, tuples composés de ceux-ci…

Dans un dictionnaire `d`, et pour une valeur notée `k`, l'accès à `d[k]` va déclencher une erreur si `k` n'est pas une clé de `d`. Il est donc souvent utile de pouvoir tester à l'avance cette condition, avec la syntaxe `k in d` dont la négation est `k not in d` :

```
>>> "prenom" in d
True
>>> "age" in d
False
>>> "age" not in d
True
>>> d["age"]
KeyError: 'age'
```

Par contre on peut rajouter des clés au fur et à mesure :

```
>>> d["age"] = 19
>>> print(d)
{'sexe': '2', 'prenom': 'EMMA', 'annee': '2004', 'nombre': '6634', 'age': 19}
```

ou en supprimer

```
>>> del d["nombre"]
>>> print(d)
{'sexe': '2', 'prenom': 'EMMA', 'annee': '2004', 'age': 19}
```

Le dictionnaire vide est noté tout simplement `{}`. Parfois on souhaite partir d'un dictionnaire vide et ajouter des clés au fur et à mesure.

Il existe aussi, comme pour les listes, une syntaxe **en compréhension**, où on peut donner à la fois une expression pour les clés et pour les valeurs. Étudions par exemple le dictionnaire suivant

```
d = {x**2: x for x in range(10)}
```

qui donne

```
{0: 0, 1: 1, 4: 2, 9: 3, 16: 4, 25: 5, 36: 6, 49: 7, 64: 8, 81: 9}
```

dont les clés sont (certains) nombres et les valeurs correspondantes vont être leur racines carrées. Ce dictionnaire permet donc de calculer directement les racines carrés de ces nombres (et seulement ceux-là), par exemple `d[49]` donne `7` (il n'y a plus de guillemets ici : les clés sont de type `int`). Ainsi un dictionnaire représente une application au sens mathématique, de l'ensemble des clés vers l'ensemble des valeurs, et l'application réciproque correspond simplement à échanger les clés avec les valeurs.

Les dictionnaires sont aussi utilisés par le langage Python lui-même pour maintenir des informations sur le programme en cours de fonctionnement… La fonction `globals()` renvoie un dictionnaire des variables actuellement enregistrées dans la session, affichez-le !

II Itération sur un dictionnaire

Dans le TP précédent et jusqu'à maintenant nos dictionnaire avaient tous quatre clés fixes et bien connues à l'avance ; la liste de tous les prénoms était en fait une *liste de dictionnaires*. Mais en pratique, une fonction reçoit en argument un dictionnaire et ne sait pas forcément quelles en sont les clés. Il faut donc utiliser une boucle `for` pour parcourir un à un tous les éléments du dictionnaire, tout comme on parcourt les éléments d'une liste de longueur quelconque.

Cependant il y a trois façons de faire…

Reprenons un dictionnaire :

```
d = {"sexe": "2", "prenom": "EMMA", "annee": "2004", "nombre": "6634"}
```

1. **Itérer sur les clés** de `d` : c'est une boucle `for` sur l'objet `d.keys()`, qui fournit unes par unes les clés de `d`.

```
>>> for k in d.keys(): print(k)
sexe
prenom
annee
nombre
```

2. **Itérer sur les valeurs** de `d` : de même, c'est une boucle `for` qui porte sur l'objet `d.values()` qui fournit les valeurs unes par unes.

```
>>> for v in d.values(): print(v)
2
EMMA
2004
6634
```

3. **Itérer sur les paires** `(clé, valeur)` de `d` avec l'objet `d.items()`, qui fournit des tuples.

```
>>> for (k, v) in d.items(): print("clé :", k, "valeur :", v)
clé : sexe valeur : 2
clé : prenom valeur : EMMA
clé : annee valeur : 2004
clé : nombre valeur : 6634
```

Bien sûr, en pratique itérer sur les clés fonctionne toujours, puisque si on a `k` alors on a accès à `d[k]`. Mais il faut considérer que l'accès à une valeur est une opération lourde, bien plus lourde dans les dictionnaire que l'accès aux éléments d'une liste (voir l'annexe). Ainsi itérer directement sur les paires, ou sur les valeurs, est bien plus rapide que d'itérer sur les clés *puis* de chercher les valeurs correspondantes.

Dans les exercices de cette partie, aucune méthode n'est extraordinairement nouvelle. Il s'agit de boucles pour parcourir un dictionnaire et il faut seulement se poser la question du choix de l'une des trois méthodes d'itération précédente. Ensuite, ce sont les mêmes types d'algorithmes que ceux rencontrés de nombreuses fois sur les listes.

Exercice 18.1 *Itérer sur les valeurs*
On représente une liste de courses par un dictionnaire qui donne, pour chaque produit acheté, le prix en euros.

```
courses = {"pain": 1.20, "camembert": 3.0, "salade": 1.5, "savon": 3.5}
```

1. Écrire une fonction `facture(d)` qui prend en argument un tel dictionnaire et qui calcul le montant total de la facture.
2. Écrire une fonction `est_trop_luxueux(d)` qui renvoie `True` si l'un des articles a un prix supérieur à 5 euros, et `False` sinon.

Exercice 18.2 *Itérer sur les clés*
On représente une recette de cuisine par un dictionnaire dont les clés sont les ingrédients et les valeurs, pour chaque ingrédient, sont la quantité (l'unité est variable selon l'ingrédient : gramme, millilitre, nombre). Par exemple

```
crepes = {"farine": 250, "oeufs": 4, "lait": 300, "beurre": 50, "sucre": 30}
```

1. Écrire une fonction `nombre_ingredients(d)` qui renvoie le nombre d'ingrédients différents de la recette.
2. Supposons qu'on soit allergique aux noix. Écrire une fonction `est_sans_noix(d)` qui renvoie `True` si la recette ne contient pas de noix, et `False` sinon.
3. On souhaite faire un régime. Écrire une fonction `est_sain(d)` qui renvoie `True` si la recette contient moins de 50 grammes de sucre, et `False` sinon.

   Attention car il peut se produire deux situations : ou bien `"sucre"` sera dans les clés avec une valeur qui doit être inférieure à 50, ou bien `"sucre"` ne sera pas du tout dans les clés.

Exercice 18.3 *Itérer sur les couples*
On représente un porte-monnaie contenant des pièces ou des billets par un dictionnaire `d`, où `d[x]` représente le nombre de billets (ou pièces) de valeurs `x`. Par exemple, le dictionnaire

```
d = {1: 4, 2: 7, 10: 1}
```

représente un porte-monnaie avec 4 pièces de 1 euro, 7 pièces de 2 euros et 1 billet de 10 euros. Remarquez qu'on ne se préoccupe en fait pas de s'il s'agit de billets ou de pièces, ni si les valeurs de ces pièces existent réellement, tout cela pourrait fonctionner de la même façon dans d'autres systèmes monétaires que l'euro. Dans cet exemple sa somme totale est de 28 euros.

Écrire une fonction `oseille(d)` qui prend en argument un tel dictionnaire représentant un porte-monnaie et qui renvoie la somme d'argent totale que cela représente.

III Problèmes

Exercice 18.4
On souhaite dénombrer les anagrammes d'un mot. Pour cela la première étape est de partir d'un mot, représenté comme une chaine de caractères, et de compter combien de fois apparait chaque lettre. Si on n'avait pas les dictionnaires, il faudrait savoir à l'avance avec combien de lettres on travaille (par exemple 26 — mais alors il n'y a plus de marge pour les accents ou les majuscules) et initialiser une liste de taille 26 comptant combien de fois apparait chaque lettre. Avec les dictionnaires, nous allons pouvoir travailler avec des mots absolument quelconques et sans connaitre les lettres à l'avance.

1. Écrire une fonction `compte_lettres(s)` qui prend en argument une chaine de caractères `s` et qui renvoie un dictionnaire `d`, dont les clés sont des lettres apparaissant dans `s` et dont la valeur `d[x]` est le nombre de fois que la lettre `x` apparait.

   Pour cela on a besoin d'initialiser un dictionnaire vide au début, puis d'une boucle qui fournit unes par unes les lettres de `s`. Attention car à chaque lettre, il faut tester si elle est déjà dans le dictionnaire (auquel cas incrémenter la valeur), ou sinon l'ajouter dedans simplement.

2. Écrire une fonction `nombre_anagrammes(s)` qui compte le nombre d'anagrammes de `s`.

   On rappelle qu'il s'agit de la factorielle du nombre de lettres de `s`, divisé par le produit des factorielles du nombre de fois que chaque lettre apparait ; on a donc besoin d'appeler la fonction précédente et d'itérer sur le dictionnaire `d` pour calculer ce produit de factorielles. On pourra ré-écrire rapidement la fonction factorielle, ou utiliser celle fournie avec `from math import factorial`.

Exercice 18.5
On donne le dictionnaire suivant :

```
chiffres = {"zéro": 0, "un": 1, "deux": 2, "trois": 3, "quatre": 4, "cinq": 5, "six": 6,
"sept": 7, "huit": 8, "neuf": 9}
```

1. Écrire une fonction `traduit(L)` qui prend en argument une liste de mots parmi ceux-ci, et affiche successivement les chiffres correspondants.

   ```
   >>> traduit(["deux", "huit", "trois"])
   2
   8
   3
   ```

2. Écrire une fonction `nombre(L)` qui prend en argument toujours une liste de mots, et renvoie le nombre que cela forme, de type `int`.

   ```
   >>> nombre(["deux", "huit", "trois"])
   283
   ```

   On remarque qu'étant donné un nombre N écrit avec la liste de ses chiffres $N = a_k...a_1a_0$ (où a_0 est le chiffre des unités, a_1 le chiffre des dizaines, etc) alors le nombre N est égal à

   $$N = (\cdots(a_k \times 10 + a_{k-1}) \times 10 + \cdots) \times 10 + a_0$$

   par exemple $283 = (2 \times 10 + 8) \times 10 + 3$, ce qui permet de calculer N en lisant ses chiffres de gauche à droite (donc dans l'ordre naturel pour le problème que nous traitons là).

3. Bonus : étant donnée une chaine de caractères `s`, la méthode `s.split()` « casse » la chaine aux caractères espaces et produit une liste de mots :

   ```
   >>> s = "deux huit trois"
   >>> s.split()
   ['deux', 'huit', 'trois']
   ```

   Ré-écrire la fonction `nombre` pour qu'elle prenne en argument une seule chaine de caractères.

Exercice 18.6 (*) *Matrices creuses*
On s'intéresse à des matrices de taille (n, p) contenant une grande majorité de coefficients nuls, et quelques coefficients par-ci par-là non nuls. Plutôt que de stocker en mémoire un tableau entier de $n \times p$ cases dont la plupart vont être nulles, on représente une telle matrice par un dictionnaire `d` dont les clés sont des couples (i, j) ($0 \leqslant i < n$ et $0 \leqslant j < p$ comme d'habitude dans la convention informatique) et la valeur `d[(i, j)]` est le

coefficient d'indice (i, j). Si une clé n'est pas présente, on interprète le coefficient correspondant comme étant nul (mais réciproquement, il peut y avoir des clés avec une valeur nulle). Par exemple la grosse matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sera représentée tout simplement par le dictionnaire

```
d = {(0, 2): 5, (2, 3): 7, (3, 1): -1}
```

Écrire les fonctions classiques dans ce contexte :

1. `identité(n)` : matrice identité de taille n,
2. `somme(A, B)` : somme de deux matrices,
3. `produit(A, B)` : produit de matrices,
4. `est_triangulaire_supérieure(A)` : renvoie `True` si la matrice est triangulaire supérieure, `False` sinon.

Étonnamment, les fonctions n'ont pas vraiment besoin de connaitre la taille de la matrice, et la notion n'a pas de sens ici…

Remarque. On tombe toujours sur le même problème : il faut tester si une clé est présente ou non avant d'y accéder, et il faut considérer que le coefficient est zéro si la clé n'apparait pas. Cela est assez ennuyeux surtout que tester si une clé est présente dans le dictionnaire est déjà une opération lourde, tout autant que d'accéder à la valeur (voir l'annexe). Se renseigner notamment sur les méthodes `d.setdefault(k, v)` et `d.get(k, v)` ainsi que sur le type `defaultdict` et comment cela permet de traiter élégamment ce problème.

IV Annexe : tables de hachage

Nous avons déjà dit plusieurs fois que dans une liste, il faut imaginer que les éléments sont rangés les uns à la suite des autres comme dans des cases de la mémoire. Cela permet d'accéder directement au i-ème élément de la liste.

Dans un dictionnaire, on peut imaginer naïvement ranger à la suite les clés et leurs valeurs, dans des cases aussi. Cependant les problèmes suivants se posent :

1. Pour rechercher une clé du dictionnaire, et sa valeur correspondante, il est nécessaire de parcourir toutes les clés unes par unes, exactement comme quand on cherche un élément dans une liste. Cela peut être long s'il y a beaucoup de clés.
2. De plus, si les clés sont de type chaine de caractères, comparer les clés prend plus de temps que de comparer des nombres ; car pour comparer deux chaines il faut comparer successivement leurs caractères uns par uns.

Ainsi cette méthode peut vite devenir très lourde.

La solution qui a été trouvée s'appelle **table de hachage**. Elle consiste à définir une certaine fonction mathématique (assez abstraite) dite **fonction de hachage**, calculable sur **tous** les objets possibles pouvant servir de clé, dont le résultat est un simple nombre entier qui puisse nous dire où se situe la clé dans la mémoire. Cela résout le problème 1 car comparer des nombres est nettement plus rapide que comparer des chaines de caractères, et cela résout partiellement le problème 2 — au minimum on peut espérer ranger les clés dans l'ordre croissant selon leur valeur de hachage, et rechercher les clés rapidement grâce à la dichotomie.

En fait un problème immédiat se pose : il y a de toute façon beaucoup plus de clés possibles que de nombres et certaines clés auront donc la même valeur par la fonction de hachage (on parle de **collision**), en termes mathématiques la fonction de hachage part d'un ensemble très gros vers un ensemble plus petit et ne peut donc pas être injective (principe des tiroirs…) Cela rend la conception de tables de hachages plus subtile que ce qui

est décrit ici. La fonction de hachage doit être créée de telle façon que les collisions ne se produisent pas trop souvent, et si c'est le cas, si deux clés se retrouvent avec la même valeur de hachage, alors tant pis : on les stocke à la suite et on comparera les clés comme dans la méthode naïve.

En Python, la fonction de base `hash(x)` permet de connaitre la valeur de hachage d'un objet `x`, même si ce nombre ne nous dit concrètement pas grand chose…

```
>>> x = 3
>>> hash(x)
3
# OK, pour les nombres entiers c'est eux-mêmes
>>> x = 3.14
>>> hash(x)
322818021289917443
# que faire de cette information ?
>>> x = (1, 2)
>>> hash(x)
-3550055125485641917
# stop, stop !!!
>>> x = "steak"
>>> hash(x)
5425928401636965275
# le steak est haché !
```

Tous les objets ne peuvent pas servir de clé. Imaginons un dictionnaire contenant pour clés les deux listes `L = [1, 2]` et `M = [1, 3]` (pourquoi pas), avec une valeur pour chacune.

```
d = {L: "truc", M: "machin"}
```

Puis faisons `M[1] = 2`. Les listes `L` et `M` deviennent alors égales, et devraient donc avoir la même valeur de hachage, du coup il n'y a plus qu'une seule clé ? Qu'est-ce que `d[[1, 2]]` ? Comment retrouver alors les valeurs ? En fait, cela est interdit et les listes ne sont pas hachables. Les objets hachables ne doivent jamais pouvoir être modifiés au cours du programme, et la fonction de hachage doit toujours renvoyer la même valeur pour un même objet.

```
>>> L = [1, 2]
>>> hash(L)
TypeError: unhashable type: 'list'
```

TP 19
Graphes

Les **graphes** sont des structures de données (comme les listes, tableaux, dictionnaires, …) énormément utilisées en informatique et en mathématiques car ils sont assez simples à manipuler et modélisent de très nombreuses situations.

I Notion de graphe

Un graphe est tout simplement donné par un ensemble de sommets, reliés entre eux par des arêtes :

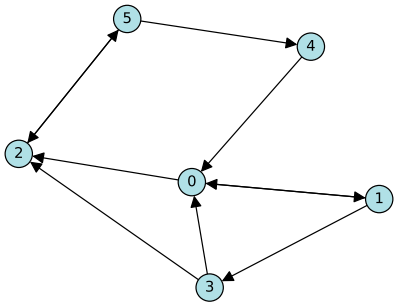


Figure 18. – Un graphe

Ce genre de dessin modélise de très nombreuses situations différentes :

- Une carte géographique, où les sommets sont des villes et les arêtes sont des routes reliant ces villes. La carte du métro parisien est assurément un graphe, de même que la carte des lignes de train en France.

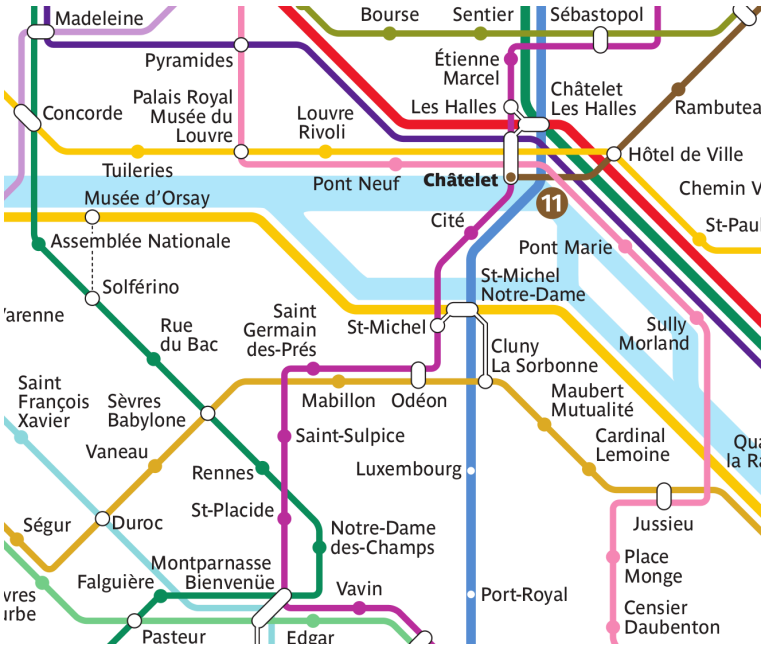


Figure 19. – Zoom sur un graphe bien connu. Source : RATP.

- Un réseau social, où les sommets sont des personnes et une arête entre deux personnes signifie que ces personnes sont amies, ou bien (suivant le sens de la flèche) que l'un est un *follower* de l'autre. Les gros réseaux sociaux ont absolument besoin d'algorithmes efficaces opérant sur des graphes avec des millions d'informations.

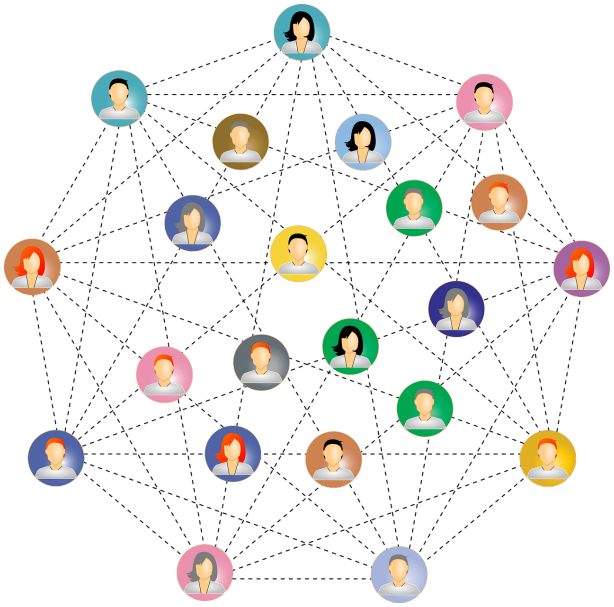


Figure 20. – Graphe d'un réseau social. Source : Pixabay (image libre).

- Un jeu de stratégie, où chaque sommet représente un état possible du jeu, et une arête représente une façon de passer d'un état à un autre. Jouer une partie revient à démarrer sur un sommet initial puis passer d'un sommet à un autre via des arêtes, jusqu'à arriver sur un sommet représentant une partie gagnée. Un jeu de labyrinthe peut se représenter par un graphe dont le but est d'arriver au sommet final, en partant d'un sommet initial donné.

La formalisation mathématique est celle-ci, prenant en compte la petite flèche dessinée sur les arêtes qui correspond à une orientation :

Définition. Un **graphe orienté** est la donné d'un ensemble fini S (ensemble des **sommets**) et d'un sous-ensemble $A \subset S \times S$ (ensemble des **arêtes**). Si x, y sont deux sommets, la condition $(x, y) \in A$ signifie qu'il y a une arête de x vers y.

Une autre variante de graphe est celle où on ne s'occupe pas du sens des arêtes, qu'on représente donc comme un simple trait entre sommets : deux sommets x et y sont ou bien ne sont pas connectés, peu importe dans quel ordre.

Définition. Un **graphe non orienté** est un graphe $G = (S, A)$ vérifiant la condition :

$$\forall (x, y) \in S^2, \quad (x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$$

Autrement dit on interprète la condition $(x, y) \in A$ comme signifiant qu'il existe une arête entre les sommets x et y, et ceci est équivalent à dire qu'il existe une arête entre les sommets y et x.

Notre définition générale de graphe n'exclut pas l'existence de **boucle** : une arête d'un sommet x à lui-même, $(x, x) \in A$.

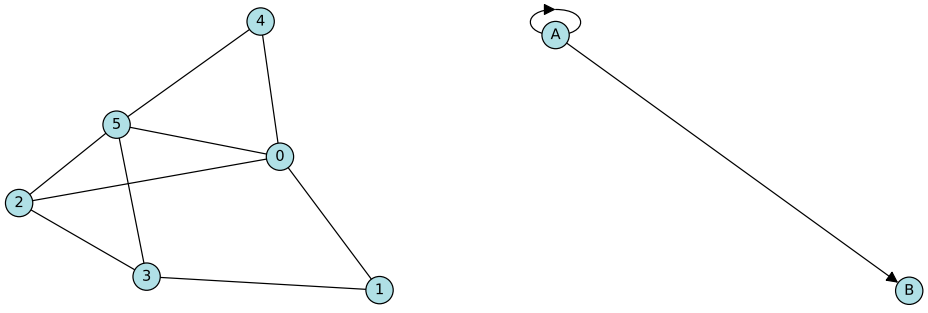


Figure 21. – À gauche, un graphe non orienté, représenté sans flèches.
À droite, une boucle sur le sommet A.

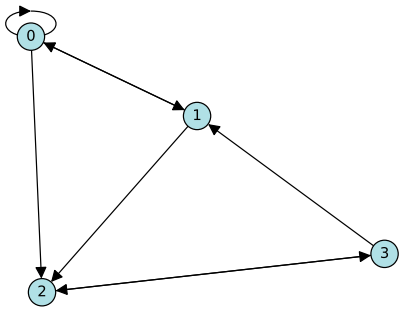
II Des graphes en Python

II.1 Représentation

Il y a plusieurs façons de représenter un graphe orienté $G = (S, A)$ en Python. On suppose qu'on a d'abord numéroté les N sommets de 0 à $N-1$, ainsi $S = \{0, 1, ..., N-1\}$.

1. Par **liste d'adjacence** : on donne une liste `L` où pour chaque indice de sommet `i`, `L[i]` est la liste des sommets **vers lesquels** mène une arête issue de `i`. Mathématiquement c'est la liste des $\{j \in S \,|(i,j) \in A\}$.
2. Par **matrice d'adjacence** : on donne une liste de listes `M` représentant une matrice carrée, où `M[i][j]` vaut 1 s'il y a une arête du sommet i vers le sommet j et 0 sinon.

Prenons par exemple le graphe très simple



Alors vérifiez que la liste d'adjacence est

```
L = [[0, 1, 2], [0, 2], [3], [1, 2]]
```

et que la matrice d'adjacence est

```
M = [[1, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]]
```

3. Si on ne souhaite pas numéroter les sommets, alors on peut leur donner un nom et travailler comme sur les listes d'adjacence mais avec à la place un **dictionnaire d'adjacence** : un dictionnaire où chaque clé est un sommet et la valeur correspondante est la liste des sommets auquel il est relié. Voici par exemple un bout de graphe non-orienté représentant des lignes de train en France :

```
trains = {"Paris": ["Versailles", "Lyon", "Luxembourg"], "Versailles": ["Paris"],
"Lyon": ["Paris", "Marseille", "Grenoble", "Orange"], "Grenoble": ["Lyon"], "Marseille":
["Lyon", "Orange", "Istres"], "Istres": ["Marseille"], "Orange": ["Lyon", "Marseille"],
"Luxembourg": ["Paris"]}
```

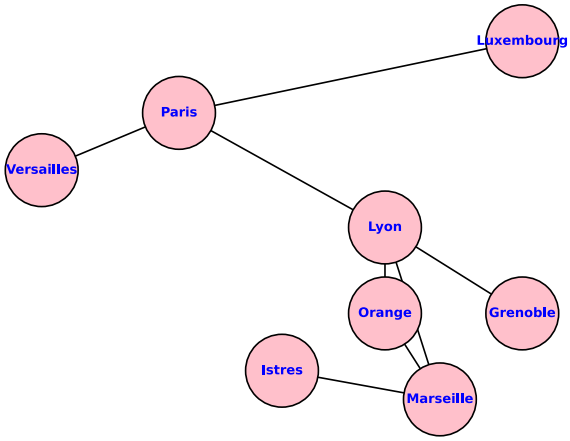


Figure 23. – Carte de France…

En fait, chaque représentation possible a ses avantages et ses inconvénients…

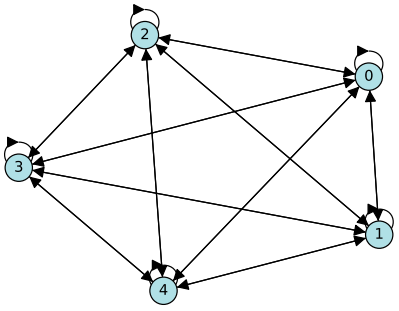
Exercice 19.1 *(Passer et revenir plus tard)*
Écrire des fonctions

1. `liste_vers_matrice(L)` : convertit un graphe représenté par une liste d'adjacence, vers une matrice d'adjacence. On aura besoin de savoir créer une matrice nulle, et d'une double boucle pour itérer sur les listes d'adjacence de chaque sommet.
2. `matrice_vers_liste(M)` : convertit un graphe représenté par une matrice d'adjacence, vers une liste d'adjacence. On aura besoin de créer une liste de listes nulles, puis d'une double boucle pour parcourir la matrice d'adjacence et on utilisera `append` pour ajouter au fur et à mesure les sommets dans la liste d'adjacence.

II.2 Quelques graphes particuliers

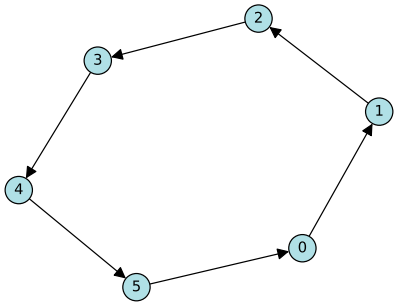
Étudions maintenant quelques exemples particuliers de graphes. On choisit pour les questions suivantes de travailler avec des matrices d'adjacence.

Exercice 19.2
Un graphe $G = (S, A)$ est dit **complet** s'il y a des arêtes entre tous les sommets possibles, c'est-à-dire $A = S \times S$. En particulier **le graphe complet** à n sommets est le graphe sur l'ensemble des sommets $\{0, 1, ..., n-1\}$ qui sont tous reliés entre eux.



Écrire une fonction `graphe_complet(n)` qui renvoie la matrice d'adjacence du graphe complet à n sommets.

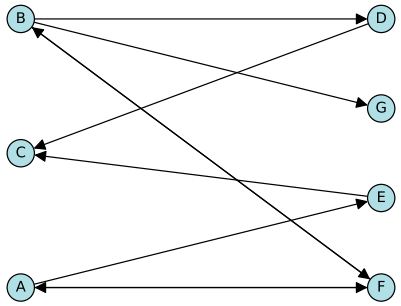
Exercice 19.3
Le **graphe cyclique** à n sommets est le graphe dont l'ensemble de sommets est $\{0, 1, ..., n-1\}$ et tel que le sommet i est relié au sommet $i+1$ (incluant le sommet $n-1$ relié au sommet 0). Il se représente naturellement en cercle.



Écrire une fonction `graphe_cyclique(n)` qui renvoie la matrice d'adjacence du graphe cyclique sur n sommets.

Exercice 19.4
Un graphe $G = (S, A)$ est dit **biparti** si on peut diviser l'ensemble des sommets en deux, $S = S_1 \cup S_2$ avec $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, tel que les arêtes ne peuvent exister qu'entre un élément de S_1 et un élement de S_2, dans un sens

ou dans l'autre. Mathématiquement $A \subset (S_1 \times S_2) \cup (S_2 \times S_1)$. Cela représente par exemple un ensemble de personnes dans une soirée divisé entre hommes et femmes, et où une arête de x vers y signifie « x a invité y à danser » ; il se représente naturellement avec les ensembles de sommets S_1 et S_2 face à face.



En particulier, **le graphe biparti complet** sur (n, p) sommets est le graphe dont l'ensemble des sommets est $S = \{0, 1, ...n + p - 1\}$ divisé entre $S_1 = \{0, ..., n - 1\}$ et $S_2 = \{n, ..., n + p - 1\}$, et qui admet toutes les arêtes possibles entre les sommets de S_1 et de S_2.

Écrire une fonction `graphe_biparti_complet(n, p)` qui renvoie la matrice d'adjacence du graphe biparti complet sur (n, p) sommets.

II.3 Degré d'un sommet

Définition. Soit G un graphe orienté et soit x un sommet de G.

1. Le **degré sortant** de x est le nombre d'arêtes partant de x.
2. Le **degré entrant** de x est le nombre d'arêtes arrivant à x.
3. Le **degré** du sommet x est la somme du degré sortant et du degré entrant.
4. Le **degré total** d'un graphe est le maximal des degrés de tous ses sommets.

Dans un graphe représentant un réseau social, où une arête de x vers y signifie que x est un *follower* de y, le degré sortant est le nombre de personnes que suit x, et le degré entrant est le nombre de followers de x.

Exercice 19.5
Écrire les fonctions, prenant en argument un graphe orienté G représenté par une matrice d'adjacence `M` et un sommet `x` (un nombre entier) :

1. `degré_sortant(M, x)`
2. `degré_entrant(M, x)`
3. `degré(M, x)`
4. `degré_total(M)`

III Chemins et connexité

Un thème important est d'étudier les chemins dans un graphe, en passant d'un sommet au suivant via une arête.

Définition. Soit $G = (S, A)$ un graphe.

1. Soient $x, y \in S$ deux sommets. Un **chemin** dans G de x à y est la donnée d'une suite de sommets $s_0, ..., s_n$ tels que :
   - $s_0 = x$,
   - $s_n = y$,
   - $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $(s_i, s_{i+1}) \in A$.

2. Le nombre n ci-dessus est appelé la **longueur** du chemin ($n-1$ est le nombre d'arêtes parcourues).
3. Un **cycle** est un chemin partant d'un sommet et arrivant à lui-même : $s_0 = s_n$.

Remarquons que par convention, il existe toujours un chemin de longeur 0 d'un sommmet x à lui-même. Les arêtes de G sont exactement les chemins de longueur 1.

Un chemin dans un graphe, qu'il soit représenté en numérotant les sommets ou bien en leur donnant un nom (dictionnaire d'adjacence), est représenté en Python comme une simple liste `C` des sommets par lesquels le chemin passe, dans l'ordre. Alors `len(C)-1` est la longueur du chemin.

Exercice 19.6 *Mathématiques*
Soit G un graphe orienté et soit M sa matrice d'adjacence. Démontrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, le coefficient (i, j) de M^p est le nombre de chemins de longueur exactement p reliant le sommet i au sommet j. On se concentrera sur le cas $p = 2$.

La notion suivante a du sens seulement si G est non-orienté.

Définition. Soit G un graphe non-orienté.

1. G est dit **connexe** si, entre tous sommets x et y, il existe au moins un chemin.
2. Les **composantes connexes** sont les sous-graphes de G maximaux (formés d'un plus grand nombre possible de sommets parmi ceux de G) qui sont connexes.

Un graphe non-connexe ressemble à ses composantes connexes posées simplement les unes à côté des autres.

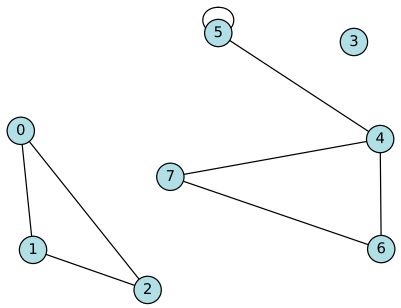


Figure 27. – Un graphe avec trois composantes connexes

Exercice 19.7 *Mathématiques*
1. Justifier que si le graphe G a N sommets, alors pour tous sommets x, y, *si* il existe un chemin de x vers y, *alors* il en existe un de longueur inférieure ou égale à $N + 1$ (cela ne signifie *pas* que tous les chemins de G sont de longueur au plus N !!!)
2. En déduire, à l'aide de l'exercice précédent, une méthode pour déterminer avec un nombre fini de calculs si un graphe donné est connexe ou non. On pourra aussi implémenter en Python une fonction `existe_chemin(x, y)` (renvoie `True` s'il existe un chemin de x à y, et `False` sinon), éventuellement en utilisant les fonctions Numpy pour manipuler les matrices.

Exercice 19.8
1. On représente un chemin par une liste `C` des sommets à parcourir, dans l'ordre, dans un graphe représenté par une matrice d'adjacence `M`. Écrire une fonction `est_chemin_possible(C, M)` qui renvoie `True` si ce chemin est bien possible (c'est à dire s'il existe bien une arête de `C[i]` à `C[i+1]`, pour tout i) et `False` sinon.
2. Écrire la même fonction mais en prenant cette fois-ci comme argument un dictionnaire d'adjacence.

Remarque. La matrice d'adjacence d'un graphe non-orienté est une matrice *symétrique*… En général, pour un graphe orienté, qu'est-ce que la transposée de la matrice d'adjacence ?

IV Pondération

Dans de nombreuses situations on veut attacher plus d'information sur les graphes. Par exemple sur le graphe représentant des lignes de train, on veut attacher sur chaque arête un nombre qui indique la distance entre les deux villes. La distance totale associée à un chemin est alors la somme des distances sur les arêtes par lesquelles passe le chemin. Un exemple d'une question extrêmement importante est de trouver le plus court chemin entre deux points.

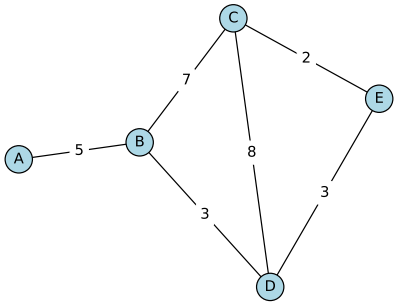


Figure 28. – Un graphe non-orienté pondéré

Une façon simple de représenter cette situation en Python est de numéroter les sommets, puis d'utiliser une modification de la matrice d'adjacence où `M[i][j]` est tout simplement égal à la distance entre les sommets i et j. Si les sommets ne sont pas reliés, il faut convenir d'une valeur, par exemple 0 (attention alors à bien distinguer ce cas dans les programmes).

Exercice 19.9
Écrire une fonction `longueur(M, C)` prenant en argument un chemin `C` comme dans la partie précédente (une liste de sommets parcourus dans l'ordre) et une matrice d'adjacence `M`, et qui calcule la longueur totale du chemin.

V Parcours aléatoire

Exercice 19.10
Le chat passe son temps entre quatre activités : dormir sur le canapé (C), manger (M), sortir (S), et… dormir sur le lit (L). Son parcours d'une journée typique est le suivant :

- S'il dort sur le canapé, alors ensuite il peut aller manger ou sortir ou bien passer sur le lit.
- S'il mange, alors ensuite il peut sortir ou bien dormir sur le lit.
- S'il sort, alors ensuite il peut dormir sur le canapé ou le lit ou bien manger.
- S'il dort sur le lit, alors il peut rester sur le lit ou bien passer sur le canapé.

À chaque heure, il passe aléatoirement d'une activité à l'autre. On représente cette situation par un graphe orienté à quatre sommets, représentant les quatre activités possibles du chat, et des flèches indiquant qu'il peut passer d'une activité à l'autre.

1. Dessiner sur feuille le graphe correspondant.
2. Écrire en Python le dictionnaire d'adjacence `chat` correspondant.
3. Écrire une fonction `suivant(G, x)` prenant en argument un graphe `G` (quelconque) représenté par un dictionnaire d'adjacence, et un sommet `x`, et qui choisit au hasard un des sommets auxquels on peut accéder depuis `x`. On pourra pour cela utiliser la fonction `randint` du module `random` pour choisir un élément au hasard dans une liste.

4. En déduire une fonction `parcours(G, e, n)` qui part d'un sommet initial `e` dans un graphe `G`, et n fois de suite, choisit un sommet suivant au hasard.
5. Appliquer la fonction sur le dictionnaire `chat`, avec n assez grand, en affichant à chaque étape quelle est l'activité du chat.
6. Améliorer la fonction `parcours` en une fonction `parcours_compte(G, e, n)` qui renvoie un dictionnaire, constitué des même clés que `G`, qui indique combien de fois le parcours est passé sur chaque sommet ; et l'appliquer au graphe `chat`.

TP 20
Parcours de graphes

Dans la continuité du TP précédent, nous nous intéressons aux questions de parcours de graphes. **Parcourir** un graphe, c'est écrire une fonction qui passe successivement d'un sommet à l'autre, dans un certain ordre, éventuellement pour y effectuer certaines opérations. On peut penser à une ville qu'on veut visiter entièrement, en passant d'un point à l'autre via les rues ; ou bien à un labyrinthe dont il faut sortir. Cela permet d'espérer répondre aux questions suivantes :

- Partant d'un sommet x, peut-on toujours atteindre un autre sommet y ? Par exemple, peut-on trouver un chemin pour sortir d'un labyrinthe ?
- Peut-on déterminer un chemin le plus court possible entre deux sommets ?

Cependant il y a plusieurs stratégies possibles, qui sont plusieurs ordres de parcours… Dans chacune de ces stratégies il y a une notion de sommets « déjà vus » (ceux sur lesquels nous sommes déjà passés, et nous n'avons pas particulièrement besoin d'y revenir) et de sommets « à voir » (ceux qui sont reliés aux sommets vus mais sur lesquels nous ne sommes pas encore passés).

On pourra utiliser comme exemple le graphe orienté ci-dessous, donné comme un dictionnaire d'adjacence :

```
G_exemple = {'A': ['B', 'D'], 'B': ['C'], 'C': ['E', 'F'], 'D': ['E'], 'E': ['B'], 'F': [],
'G': ['C']}
```

Exercice 20.1
Dessiner ce graphe sur feuille et le garder sous les yeux pour les deux premières parties du TP.

I Parcours en profondeur

Le parcours en profondeur correspond à explorer une ville où, dès qu'on trouve une rue nouvelle, on y va ! Jusqu'au bout tant qu'il y a encore à explorer. On ne revient en arrière que si on se trouve à un point où, tout autour, on a déjà tout vu.

Cela s'écrit simplement en Python avec une fonction récursive. Partant d'un somme initial x, on regarde les sommets vers lesquels on peut accéder (c'est facile si le graphe est donné par un dictionnaire d'adjacence), et on saute (en appelant la fonction récursivement) sur le premier venu… parmi ceux qui n'ont pas déjà été vus ! La fonction s'appelle donc `parcours_profondeur(G, x)`, prenant comme argument un graphe `G` donné comme dictionnaire d'adjacence, et un sommet `x` de `G`, et elle manipule une liste `vus` de sommets déjà vus qui est définie *en dehors de la fonction* — c'est cela qui est un peu subtil à cause de la récursivité. Au départ cette liste est vide ; à la fin de l'exécution, elle contient la liste des sommets sur lesquels la fonction est passée, et dans l'ordre.

On rappelle à ce propos les manipulations suivantes de listes :
- `vus.append(x)` : ajoute l'élément `x` à la fin de la liste `vus`.
- `if x in vus` : teste si l'élément `x` est dans la liste `vus`.
- `if x not in vus` : teste si l'élément `x` n'est pas dans la liste `vus`.

L'algorithme se décrit ainsi :
- Partant d'un sommet `x`, on le marque comme vu.
- Puis on regarde la liste des sommets auxquels on peut accéder depuis `x`.
  - Si on en trouve un, **et** qu'il n'a pas déjà été vu, on y va avec un appel récursif.
  - Sinon, la fonction s'arrête.

Sur notre graphe d'exemple, on a la séquence suivante, partant de `"A"`, où `x` est le sommet sur lequel on se trouve :
1. Parcours à partir de A : `vus = ["A"], x = "A"`
2. Découvre B, parcours à partir de B : `vus = ["A", "B"], x = "B"`
3. Découvre C, parcours à partir de C : `vus = ["A", "B", "C"], x = "C"`
4. Découvre E, parcours à partir de E : `vus = ["A", "B", "C", "E"], x = "E"`
5. Retour à parcours à partir de C : `vus = ["A", "B", "C", "E"], x = "C"`
6. Découvre F, parcours à partir de F : `vus = ["A", "B", "C", "E", "F"], x = "F"`

7. Retour à parcours à partir de C : `vus = ["A", "B", "C", "E", "F"]`, `x = "C"`
8. Retour à parcours à partir de B : `vus = ["A", "B", "C", "E", "F"]`, `x = "B"`
9. Retour à parcours à partir de A : `vus = ["A", "B", "C", "E", "F"]`, `x = "A"`
10. Découvre D, parcours à partir de D : `vus = ["A", "B", "C", "E", "F", "D"]`, `x ="D"`
11. Retour à parcours à partir de A : `vus = ["A", "B", "C", "E", "F", "D"]`, `x ="A"`
12. Fin

En fait, pour pouvoir renvoyer la liste `vus` définie en dehors de la fonction, on utilisera plutôt une *sous-fonction récursive* (la fonction `parcours_profondeur` contient la liste `vus`, et à l'intérieur, la fonction `aux` est récursive).

Exercice 20.2
Écrire la fonction `parcours_profondeur(G, e)`, (on nomme `e` le sommet de départ) et tester avec le graphe d'exemple et plusieurs sommets de départ différents.

Par construction, un sommet `y` est accessible depuis `x` s'il apparait dans la liste `vus` en effectuant le parcours depuis `x`. On peut aussi arrêter la fonction plus tôt, dès qu'on trouve `y`.

Exercice 20.3
En déduire une fonction `existe_chemin(G, x, y)`, qui renvoie `True` s'il existe un chemin, suivant le sens des arêtes, du sommet `x` vers le sommet `y`, et `False` sinon.

II Parcours en largeur

Dans le parcours en largeur, on imagine qu'on visite une ville mais en restant à chaque fois le plus proche possible de son point de départ, tant qu'il reste des rues à explorer. Chaque fois qu'en prenant une rue on découvre un nouvel endroit, on ne va pas, comme dans le parcours en profondeur, y sauter tout de suite, mais on va le mettre en « liste d'attente », et on y reviendra quand on aura terminé d'explorer ce qui est déjà en attente. Ainsi on visite des zones de plus en plus larges autour de son point de départ.

La fonction ne s'écrit pas de façon récursive. Elle manipule une liste `L` et un indice `i` dans `L` tel que les sommets d'indice avant `i` ont déjà été vus, et ceux d'indice après `i` sont ceux à voir en liste d'attente. L'algorithme se décrit ainsi :

- Partant d'un sommet `x`, au départ `L = [x]` tout seul et `i = 0`.
- On lit la liste des sommets accessibles depuis `x`, et on les ajoute à `L`. Ce sont les sommets « à voir » qui sont en liste d'attente.
- Si on a bien ajouté des sommets à l'étape précédente (on est à `i = 0` et `L` est de longueur au moins 2) :
  - Alors on passe à `i = 1`, on considère qu'on est sur le sommet `L[1]`.
  - On recommence, en ajoutant à `L` tous les sommets accessibles depuis `L[1]`, ce sont les « nouveaux sommets découverts » qu'on met en file d'attente.
- Si `i` arrive au bout de la liste, et qu'il n'y a rien après, on s'arrête : on n'a plus rien en liste d'attente.

Sur notre graphe d'exemple, on a la séquence suivante en partant de `"A"` :

1. Début en A : `L = ["A"]`, `i = 0`
2. Découvre B et D : `L = ["A", "B", "D"]`, `i = 0`
3. Passe à B : `L = ["A", "B", "D"]`, `i = 1`
4. Découvre C : `L = ["A", "B", "D", "C"]`, `i = 1`
5. Passe à D : `L = ["A", "B", "D", "C"]`, `i = 2`
6. Découvre E : `L = ["A", "B", "D", "C", "E"]`, `i = 2`
7. Passe à C : `L = ["A", "B", "D", "C", "E"]`, `i = 3`
8. Découvre F : `L = ["A", "B", "D", "C", "E", "F"]`, `i = 3`
9. Passe à E : `L = ["A", "B", "D", "C", "E", "F"]`, `i = 4`
10. Passe à F : `L = ["A", "B", "D", "C", "E", "F"]`, `i = 5`
11. Fin

Exercice 20.4
Écrire la fonction `parcours_largeur(G, e)`, qui prend en argument un graphe `G` représenté par un dictionnaire d'adjacence, et un sommet de départ `e`, et renvoie la liste des sommets vus ; et tester avec plusieurs sommets de départs.

Un avantage du parcours en largeur, c'est que les sommets sont automatiquement vus dans l'ordre en fonction de leur distance au point de départ (les zones visitées forment des cercles de plus en plus larges autour du départ). Seul le sommet `x` est à distance 0 de lui-même ; ensuite, seuls les nouveaux sommets découvert depuis `x` sont à distance exactement 1 de `x`, etc. Pour calculer les distances, il est nécessaire de calculer, en parallèle (et aussi avec des `append`) de la liste `L`, une liste `D` où `D[i]` est la distance à `x` du sommet `L[i]`. Alors quand on découvre depuis `L[i]` des sommets, on les ajoute à `L`, et on ajoute en même temps leur distance à `D`, leur distance est `D[i] + 1`. Éventuellement les sommets qui ne sont pas accessibles depuis `x` n'ont pas de distance bien définie à `x` (la valeur mathématiquement cohérente est $+\infty$).

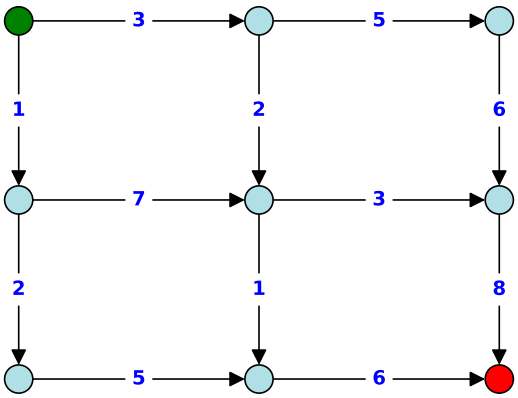
Exercice 20.5
En déduire une fonction `distance(G, x, y)` qui renvoie la distance du sommet `x` au sommet `y`, et `None` s'il n'y a pas de chemin de `x` à `y`.

III Plus court chemin : un modèle simplifié

Le très célèbre **algorithme de Dijkstra** permet de déterminer la plus courte distance entre deux sommets dans un graphe orienté pondéré, où chaque arête porte un nombre indiquant sa longueur. On peut y penser très concrètement comme une carte d'une ville, indiquant des rues et leur temps de parcours, et il faut aller d'un point à l'autre le plus rapidement possible.

Le problème est en général compliqué, dû au fait que pour choisir globalement le chemin le plus court, on ne peut pas forcément choisir *à chaque étape* l'arête la plus courte qui nous fait avancer vers notre but…

On se propose d'étudier une situation simplifiée dans laquelle notre graphe a la forme d'un quadrillage : on part d'en haut à gauche, pour aller en bas à droite, et à chaque arête on peut aller soit en bas soit à droite mais on ne peut jamais revenir en arrière (c'est bel et bien un graphe orienté, dont les sommets sont les croisements d'une grille quadrillée). Sur les arêtes sont indiquées des valeurs, qu'on suppose être des nombres réels strictement positifs. On peut y penser comme à une ville américaine, bien quadrillée, mais avec des embouteillages, et les valeurs indiquent le temps de parcours de chaque rue. Voici un exemple de tel graphe :



Exercice 20.6
Pouvez-vous trouver le plus court chemin dans ce graphe, entre le sommet de départ (en vert) et celui d'arrivée (en rouge) ?

Observez que le plus court chemin n'est pas obtenu en choisissant à chaque intersection l'arête la plus courte…

On représentera un tel graphe en Python par la donnée de *deux* tableaux : `V` est le tableau de toutes les arêtes verticales, et `H` est le tableau de toutes les arêtes horizontales. Ainsi du sommet (i, j) on peut aller au

sommet $(i+1, j)$ avec la distance `V[i][j]`, ou bien au sommet $(i, j+1)$ avec la distance `H[i][j]`. Pour l'exemple précédent les tableaux sont :

```
V = [[1, 2, 6], [2, 1, 8]]
H = [[3, 5], [7, 3], [5, 6]]
```

Dans le cas général, notre quadrillage a n lignes et p colonnes, ainsi sur une verticale on a n arêtes et $n+1$ sommets, et sur une horizontale on a p arêtes et $p+1$ sommets. Le sommet en haut à gauche est $(0, 0)$, celui en bas à droite est (n, p). Le tableau `V` est de taille $(n, p+1)$ et `H` est de taille $(n+1, p)$.

L'idée est de calculer un tableau complet `T` de taille $(n+1, p+1)$ où `T[i][j]` indique la distance la plus courte pour aller de tout en haut à gauche jusqu'au sommet (i, j). Ce tableau contient *plus* d'information que notre seul but (qui est le coefficient `T[n][p]`) mais se calcule naturellement pas à pas. Pour notre exemple, on peut vérifier que le tableau est

$$\texttt{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

et donc la distance la plus courte jusqu'en bas à droite est 12.

Exercice 20.7

1. Justifier que le tableau `T[i][j]` vérifie les relations suivantes, permettant de le calculer entièrement pas à pas :
   - (i) `T[0][0]` $= 0$,
   - (ii) $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, `T[i][0]` $=$ `T[i-1][0]` $+$ `V[i-1][0]`,
   - (iii) $\forall 1 \leqslant j \leqslant p$, `T[0][j]` $=$ `T[0][j-1]` $+$ `H[0][j-1]`,
   - (iv) $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant p$, `T[i][j]` $=$ Min(`T[i-1][j]` $+$ `V[i-1][j]`, `T[i][j-1]` $+$ `H[i][j-1]`).
2. En déduire une fonction `distances_minimales(V, H)` qui prend en argument les deux tableaux `V` et `H` décrivant entièrement notre graphe, et qui renvoie le tableau de toutes les distances minimales.

À retenir

Pour calculer *le* plus court chemin, l'algorithme consiste à calculer les longueurs de *tous* les plus courts chemins en même temps. On calcule plus de choses que demandé pour le résultat final, mais la méthode est plus efficace.

La méthode précédente donne la plus courte distance, mais ne montre pas par *quel* chemin on y accède. Une façon naturelle de s'y prendre — quoique pas la plus économe — consiste à calculer, en parallèle du tableau `T`, un tableau `C` de chemins (un chemin est représenté comme une liste de couples (i, j), indiquant les sommets par lesquels il passe, donc `T` est une… liste de liste de listes de couples) où `C[i][j]` est un chemin le plus court pour aller d'en haut à gauche jusqu'à (i, j). Au départ `C` est un tableau de valeurs `None` et `C[0][0]` est la liste `[(0, 0)]`, puis `C` se remplit au fur et à mesure qu'on remplit `T` en ajoutant (avec l'opération `+` sur les listes, par exemple `C[i][j] = C[...][...] + [(i, j)]`) le sommet par lequel on passe.

Exercice 20.8

Écrire la fonction `plus_court_chemin(V, H)` qui renvoie le chemin le plus court, d'en haut à gauche jusqu'à en bas à droite.

Une autre façon naturelle pour trouver le plus court chemin est d'utiliser le tableau `T` et de remonter en partant du coefficient en bas à droite, en déduisant *d'où* provenait le chemin le plus court. On obtiendra alors le chemin rangé en ordre inverse. Plus précisément, on initialise des variables `i` et `j` représentant le coefficient sur lequel on se trouve, et un chemin `C`, en démarrant du bas à droite :

- Si on est est remonté jusqu'en haut à gauche : c'est fini.
- Si on se trouve sur la première colonne : le chemin le plus court provenait nécessairement du haut.
- Si on se trouve sur la première ligne : le chemin le plus court provenait nécessairement de la gauche.
- Sinon :
  - Si `T[i][j-1]` $+$ `H[i][j-1]` $<$ `T[i-1][j]` $+$ `V[i-1][j]` : le chemin le plus court provenait de le gauche.

- Sinon : il provenait d'en haut.
- À chaque étape on utilise `C.append((i, j))` pour ajouter au chemin la case par laquelle on passe.

Exercice 20.9
Écrire la fonction `plus_court_chemin_inverse(V, H)` qui renvoie le plus court chemin, en ordre inverse, obtenu en partant du coefficient en bas à droite.

Vous avez tout compris ?

Exercice 20.10
Calculer le tableau des distances minimales, puis trouver le plus court chemin, pour l'exemple suivant :