Correction
TP 24
Méthode de Newton

II Étude générale

Pour formaliser un peu mieux, on fixe les hypothèses suivantes :

1. f est une fonction continue et dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$,
2. l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur I,
3. f est strictement croissante sur I,
4. $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$,
5. En posant $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (bien définie sur I) alors $\forall x \in I$, $F(x) \in I$.

Exercice 8. [Mathématiques]
Sous ces hypothèses, on définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un choix de x_0 quelconque dans I et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

1. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite ℓ vérifie bien $f(\ell) = 0$.
2. Montrer que si f est deux fois dérivable sur I, alors F est dérivable et de plus $F'(\ell) = 0$.
3. On suppose maintenant que f est $\mathcal{C}^2$ sur I. Montrer que F est continue puis que pour tout nombre $k \in]0, 1[$ il existe un intervalle ouvert J contenant ℓ tel que $\forall x \in J$, $|F'(x)| \leqslant k$.
4. Montrer qu'alors pour tous $x, y \in J$, $|F(x) - F(y)| \leqslant k|x - y|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leqslant k^n|x_0 - \ell|$.

Correction.

1. Sous les hypothèses, F est continue sur I. Dans la suite $x_{n+1} = F(x_n)$, en passant à la limite pour $n \to +\infty$, la limite ℓ doit vérifier $\ell = F(\ell)$. Mais cela donne $\ell = \ell - \frac{F(\ell)}{F'(\ell)}$ donc $f(\ell) = 0$.
2. Sous cette hypothèse f' est dérivable donc F est dérivable, et on calcule
$$\forall x \in I, \quad F'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$
et donc $F'(\ell) = 0$ car $f(\ell) = 0$.
3. Sous cette hypothèse f' est $\mathcal{C}^1$ donc F est $\mathcal{C}^1$ sur I. Fixons $k \in]0, 1[$. Alors $F'(\ell) = 0$ et par la définition de la continuité de F' en ℓ (appliquée avec $\varepsilon = k$) il existe un intervalle ouvert J centré en ℓ tel que $|F'(x)| \leqslant k$ pour $x \in J$.
4. C'est une conséquence du théorème des accroisements finis appliqué entre x et y dans J.
5. Appliqué avec $x \leftarrow x_n$ et $y \leftarrow \ell$ cela donne $|F(x_n) - F(\ell)| \leqslant k|x_n - \ell|$. Mais $F(x_n) = x_{n+1}$ et $F(\ell) = \ell$. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - \ell| \leqslant k|x_n - \ell|$$
Mais en itérant cette inégalité, par récurrence, on en déduit la formule voulue : elle est clairement vraie si $n = 0$. Et si pour un n on a $|x_n - \ell| \leqslant k^n|x_0 - \ell|$ alors
$$|x_{n+1} - \ell| \leqslant k|x_n - \ell| \leqslant k\Big(k^n|x_0 - \ell|\Big)$$
(par hypothèse de récurrence) d'où $|x_{n+1} - \ell| \leqslant k^{n+1}|x_0 - \ell|$.

□

Exercice 9. [Mathématiques]
On suppose que la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $I = [a, b]$.

1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $g : t \mapsto f(b) - f(t) - (b - t)f'(t) - A\frac{(b-t)^2}{2}$.

(a) Calculer g'.

(b) Montrer qu'on peut choisir A tel que $g(a) = g(b) = 0$.

(c) En déduire la *formule de Taylor à l'ordre* 2 : il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c) \tag{8}$$

2. Justifier l'existence de $m > 0$ et de $M \geqslant 0$ tels $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant m$ et $|f''(x)| \leqslant M$.
3. En appliquant la formule de Taylor entre ℓ et x, en déduire que $|F(x) - \ell| \leqslant \frac{M}{2m}|x - \ell|^2$.
4. On pose $K = \frac{M}{2m}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $K|x_{n+1} - \ell| \leqslant K^2|x_n - \ell|^2$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad K|x_n - \ell| \leqslant \left(K|x_n - \ell|\right)^{2^n} \tag{9}$$

Correction. 1. (a) On calcule $\forall t \in I$, $g'(t) = -(b-t)f''(t) + A(b-t)$.

(b) La condition $g(b) = 0$ est déjà vérifiée. La condition $g(a) = 0$ est équivalente à

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - A\frac{(b-a)^2}{2} = 0 \iff A = \frac{2}{(b-a)^2}\Big(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\Big)$$

Il existe donc bien une unique valeur de A (ceci ne dépend pas de t) pour laquelle $g(a) = 0$.

(c) La fonction f étant $\mathcal{C}^2$ alors g est $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus $g(a) = g(b) = 0$. On peut donc bien lui appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Cela donne par la première question $0 = -(b-c)f''(c) + A(b-c)$ d'où $A = f''(c)$, ce qui donne

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) = \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

et c'est la formule demandée.

2. La fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I fermé, borné, non-vide. En particulier f' est f'' sont toutes les deux continues sur I, donc bornées. Pour f'' on trouve donc un majorant M en valeur absolue, tel que $\forall x \in I$, $|f''(x)| \leqslant M$. Pour f' c'est un peu plus subtil : f' est minorée par un nombre $m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant m$; puis m est une valeur atteinte par f, en particulier il existe un $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = m$ et alors $f(x_0) > 0$. Ceci prouve que $m > 0$.
3. Comme suggéré, la formule de Taylor appliquée entre x et ℓ (tous les deux dans I, en prenant $x \neq \ell$), il existe $c \in]x, \ell[$ (ou $]\ell, x[$, selon l'ordre) tel que

$$f(\ell) = f(x) + (\ell - x)f'(x) + \frac{(\ell - x)^2}{2} f''(c)$$

On trouve alors ($f(\ell) = 0$)

$$-f(x) = (\ell - x)f'(x) + \frac{(\ell - x)^2}{2} f''(c)$$

donc

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = \ell - x + \frac{(\ell - x)^2}{2} \times \frac{f''(c)}{f'(x)}$$

soit

$$\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) - \ell = \frac{(\ell - x)^2}{2} \times \frac{f''(c)}{f'(x)}$$

Le morceau de gauche est $F(x) - \ell$. À droite il suffit de majorer : $|f''(c)| \leqslant M$, $|(\ell - x)^2| \leqslant |b - a|^2$, et $\frac{1}{f'(x)} \leqslant \frac{1}{m}$ (car $f'(x) \geqslant m$).

4. On a $|F(x) - \ell| \leqslant K|x - \ell|^2$, donc en multipliant par K des deux côtés $K|F(x) - \ell| \leqslant K^2|x - \ell|^2$. Comme dans l'exercice précédent, il suffit de l'appliquer avec $x = x_n$ (donc $F(x_n) = x_{n+1}$) puis une récurrence toute simple donne le résultat.

□

On parle de **convergence quadratique**. Concrètement, quand la méthode converge, le nombre de chiffres obtenus est multiplié par 2 à chaque étape. Cela est bien mieux que pour la dichotomie, pour laquelle l'intervalle est divisé par 2 et donc le nombre de chiffres gagnés à chaque étape est constant.