Correction
TP 25
Intégration numérique

I Présentation des méthodes

Dans toute cette partie, f désigne une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non-nul et x_k ($k \in [\![0, n]\!]$) les points de la subdivision régulière de I. On rappelle que $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$; il y a $n+1$ points et n intervalles, tous de même longueur $\frac{b-a}{n}$, qui est aussi égal à $x_{k+1} - x_k$.

I.5 Estimation de l'erreur

Un thème important est de comprendre à quelle vitesse la somme de Riemann converge vers l'intégrale, et quelle est exactement l'erreur commise. Traitons l'exemple de la méthode des rectangles à gauche.

Exercice 1. [Mathématiques]
On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b]$.

1. Dans un premier temps, on ne subdivise pas du tout l'intervalle.
   (a) Justifier que f' est bornée sur $[a, b]$.

   Correction. f est $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue, sur I qui est fermé borné non-vide. Donc par le théorème des bornes, f' est bornée. □

   (b) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leqslant M$. Démontrer que $\forall x \in [a, b]$, $|f(x) - f(a)| \leqslant (x-a)M$.

   Correction. Théorème des accroissements finis pour f appliqué entre a et x : il existe $c \in]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = (x-a)f'(c)$. Donc $|f(x) - f(a)| = |x-a| \times |f'(c)|$. Or $|f'(c)| \leqslant M$ et $x - a \geqslant 0$. □

   (c) En rappelant que $\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(a)$, en déduire $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}M$.

   Correction. D'abord
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a) = \int_a^b (f(x) - f(a))\,\mathrm{d}x$$
   puis l'inégalité triangulaire
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f(a)|\,\mathrm{d}x$$
   et enfin la croissance de l'intégrale utilisant la question précédente
   $$\int_a^b |f(x) - f(a)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)M\,\mathrm{d}x$$
   et ce dernier terme se calcule facilement et donne $\frac{(b-a)^2}{2}M$. □

2. On fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ les points de la subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$.
   (a) Montrer que
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x\right) \tag{10}$$

Correction. D'une part

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x$$

(ce sont des intégrales de fonctions constantes) et d'autre part (Chasles avec symbole $\sum$)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

En réunissant ces deux sommes :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x\right)$$

ce qui donne bien sous la somme $\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x$. □

(b) Justifier que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x\right) \tag{11}$$

Correction. Inégalité triangulaire deux fois de suite. D'abord pour $\sum$

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x\right|$$

puis pour l'intégrale

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x$$

ce qui donne le résultat voulu :

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x$$

□

(c) Montrer comme précédemment que si on se donne $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in[a,b]$, $|f'(x)|\leqslant M$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_k)M\,\mathrm{d}x\right) \tag{12}$$

Correction. La méthode précédente sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ (il suffit de l'appliquer en remplaçant a par x_k et b par x_{k+1}, et si M majore f' sur $[a,b]$ alors il majore encore f' sur le sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$) donne l'inégalité

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \forall x\in[x_k,x_{k+1}],\quad |f(x)-f(x_k)|\leqslant (x-x_k)M$$

donc en intégrant

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_k)M\,\mathrm{d}x$$

et enfin en sommant

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_k)M\,\mathrm{d}x\right)$$

□

(d) En déduire

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \tag{13}$$

Correction. Dans le terme de droite de l'inégalité précédente, on calcule directement

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-x_k)M\,\mathrm{d}x = \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}M = \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2}{2}M = \frac{(b-a)^2}{2n^2}M$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-x_k)M\,\mathrm{d}x\right) = n \times \frac{(b-a)^2}{2n^2}M = \frac{(b-a)^2}{2n}$$

mais, reprenant tout bout à bout, ceci est bien la majoration de l'écart demandée. □

Remarque 1. On peut démontrer exactement la même majoration pour la méthode des rectangles à droite. Par des méthodes similaires mais pour les rectangles milieux et pour les trapèzes on peut obtenir un terme de majoration de l'ordre de $\frac{(b-a)^3}{n^2}$ et pour celle de Simpson de l'ordre de $\frac{(b-a)^5}{n^4}$. Cette dernière converge donc beaucoup plus rapidement ! Les constantes qui apparaissent dans la majoration font intervenir des bornes sur les dérivées supérieures de f, via les *formules de Taylor* qui sont des analogues des accroissements finis pour les dérivées supérieures.