TP5 info

Exercice 3 :

Etudions la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.

Posons $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x$.

On a : $f = \exp \circ \left(\frac{\ln}{u}\right)$.

$\ln$, u sont définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus, u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc $\frac{\ln}{u}$ est dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$
exp étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \left(\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}\right) e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\ln(x)/x}$.

Déterminons le signe de f'.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1-\ln(x)}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln(x)}{x}} > 0$$

$$\iff 1 - \ln(x) > 0 \quad \left(\text{car } \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}}{x^2} > 0\right)$$

$$\iff 1 > \ln(x)$$

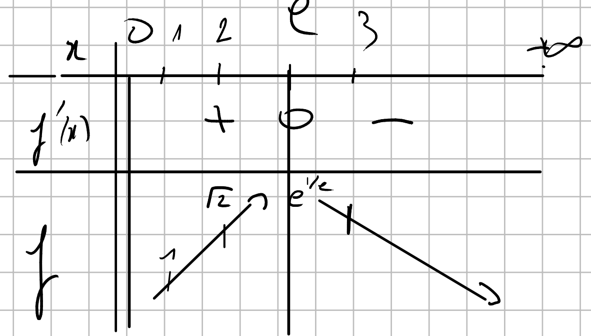
$$\iff e > x \quad (\text{stricte croissance de la fonction exp})$$

On en déduit que :
f' est strictement positive sur $]0, e[$, f' s'annule en e,
f' est strictement négative sur $]e, +\infty[$.

Donc : f est strictement croissante sur $]0,e]$

et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$.

Dressons le tableau de variations de f :



Calculons les valeurs pour les premiers entiers.

$$f(1) = 1, \quad f(2) = e^{\frac{\ln(2)}{2}} = \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(3) = \sqrt[3]{3} \qquad f(4) = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

f étant str décroissante sur $[e,+\infty[$, on en déduit que :

$$\forall x > 3,\ f(x) < \sqrt[3]{3}.$$

De plus, $f(1) = 1 < \sqrt[3]{3}$, $f(2) = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

Donc : Le plus grand entier n pour lequel $f(n)$ est maximum est égal à 3.

Exercice 7 :

1. Pour tout x assez grand :

$$f_1(x) = \frac{e^x}{x^5} \times \left(1 + \frac{3}{e^x}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5} = +\infty$

On a aussi : $\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{3}{e^x} = 1$.

Par produit, $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

2. Pour tout x assez grand.

$$f_2(x) = \frac{\ln(x)^3}{x^2} \left(\frac{1 + \frac{2}{\ln(x)^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{\ln(x)}{x^{2/3}}\right)^3 \times \left(\frac{1 + \frac{2}{\ln(x)^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{2/3}} = 0$

De plus, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{\ln(x)^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ par opérations usuelles sur les limites.

Donc : $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$

3. Pour tout x assez grand :

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}}{3x\left(1 + \frac{2}{3x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3x\left(1 + \frac{2}{3x}\right)}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{3x}}$$

Par opérations usuelles sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to \infty} f_3(x) = \frac{1}{3} .$$

4. Pour tout x assez grand :

$$f_4(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{x^2+1 - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

Or : $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0$

Donc : $\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = 0$