Dénombrement

Résumé

On introduit quelques éléments de dénombrement. L'objectif est de pouvoir compter le nombre d'objets de certains ensembles qui sont utilisés pour modéliser ou représenter des situations en probabilités par exemple.

1 Aspects généraux du dénombrement

1.1 Définitions

Définition 1. (Cardinal)

Soit E un ensemble. On dit que E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi : E \to [\![1, n]\!]$. L'entier n est unique et est appelé cardinal de E (ou nombre d'éléments de E). Il est noté $\mathrm{Card}(E)$ *ou* $\#E$.

Exemple 2.

- L'ensemble des lettres de l'alphabet est fini.
- L'ensemble $[\![4, 89]\!]$ est fini.

Remarque 3. Un point qui est affirmé dans la définition et qui pourrait mériter une démonstration est l'unicité de n.

Définition 4. (Ensembles disjoints deux à deux)

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par un ensemble I. On dit que les ensembles E_i sont disjoints deux à deux si :

$$\forall (i, j) \in I^2 (i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset).$$

De manière équivalente, en considérant la contraposée :

$$\forall (i, j) \in I^2 (E_i \cap E_j \neq \emptyset \Rightarrow i = j).$$

Exemple 5. Considérons l'application $f : \{\text{mots de la langue française}\} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall \omega \in \{\text{mots de la langue française}\}, f(\omega) = \text{nombre de voyelles de } \omega.$$

Les ensembles $(f^{-}(\{i\}))_{i \in \mathbb{N}}$ sont disjoints deux à deux.

1.2 Propriétés

Proposition 6. (Preuve bijective)

Soient E et F deux ensembles finis. S'il existe $\varphi : E \to F$ une bijection de E dans F alors :

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$$

Remarque 7. Il s'agit en fait d'une équivalence : si deux ensembles finis ont le même cardinal, alors on peut construire une bijection entre ces deux ensembles. La construction d'une bijection entre les ensembles E et F est appelée « preuve bijective ». En pratique, il ne vous sera pas demandé d'expliciter formellement la construction d'une bijection φ. Les cas usuels sont des situations où il sera en général possible de faire du dénombrement de manière intuitive.

Exemple 8. On peut construire une bijection entre $\{a, b, c, \ldots, z\}$ et $[\![1, 26]\!]$. On en déduit que l'ensemble des lettres de la langue française contient exactement 26 lettres.

Proposition 9. (Cardinal d'une union)

- *Soient E, F deux ensembles finis. Alors :* $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.
- *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'ensembles finis disjoints deux à deux. Alors*

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i).$$

Remarque 10. Une manière d'utiliser ces formules est le cas où $A \subset E$ et qu'on cherche $\mathrm{Card}(\overline{A})$. On a alors :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Exercice 1. Soient A, B, C trois ensembles finis. Exprimer $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C)$ en fonction des cardinaux de A, $B, C, A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

Proposition 11. (Cardinal d'un produit cartésien)

- *Soient E, F deux ensembles finis. Alors :* $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \cdot \mathrm{Card}(F)$.
- *Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'ensembles finis. Alors*

$$\mathrm{Card}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i).$$

2 Dénombrement d'ensembles usuels

2.1 Listes

Définition 12. (p-liste)

Soit E un ensemble, soit p un entier supérieur à 1. Un élément de E^p est appelé p-liste de E.

Exemple 13. Les 3-listes de $\{0, 1\}$ sont données par :

$$[0,0,0], [0,0,1], [0,1,0], [0,1,1], [1,0,0], [1,0,1], [1,1,0], [1,1,1].$$

Proposition 14. (Dénombrement des p-listes)

Soit E un ensemble fini, soit p un entier supérieur à 1. Alors :

$$\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p.$$

Démonstration. □

Exercice 2.

1. Dénombrer l'ensemble des nombres à 10 chiffres où les chiffres sont des éléments de $[\![0, 9]\!]$.

2. Dénombrer le nombre de séquences d'ADN possibles à 252 bases azotées. On ne se soucie pas de leur faisabilité biologique.

2.2 Listes sans répétition

Définition 15. (p-liste sans répétition)

Soit E un ensemble fini, soit p un entier supérieur à 1. Soit $L = [L_1, L_2, \ldots, L_p]$ une p-liste de E. On dit que L est sans répétition si : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 (i \neq j) \Rightarrow (L_i \neq L_j)$.

De manière équivalente avec la contraposée : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 (L_i = L_j) \Rightarrow (i = j)$.

Remarque 16. Cela signifie que les éléments de L sont distincts deux à deux.

Exemple 17. Les 2-listes sans répétition de $\{A, T, G, C\}$ sont données par

$$[A, T], [A, G], [A, C], [T, A], [T, G], [T, C], [G, A], [G, T], [G, C], [C, A], [C, T], [C, G].$$

Définition 18. (Permutation)

Soit E un ensemble fini. On note n son cardinal. Soit L une liste d'éléments E. On dit que L est une permutation de E si L est une n-liste sans répétition de E.

Remarque 19. Le terme « permutation » vient du fait qu'une telle liste peut représenter une manière de permuter tous les éléments de E.

Exemple 20. Les permutations de $\{1, 2, 3\}$ sont données par

$$[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1].$$

Cela correspond à toutes les façons de permuter tous les éléments de $\{1, 2, 3\}$.

Proposition 21. (Dénombrement des p-listes sans répétition)

Soit E un ensemble fini,soit p un entier supérieur à 1. On note $n = \mathrm{Card}(E)$. Alors le nombre de p-listes sans répétition de E est égal à :

$$\begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\ldots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. □

Remarque 22. On ne peut pas créer de liste sans répétition lorsque le nombre d'éléments de E est strictement plus petit que la taille de la liste.

Proposition 23. (Dénombrement des permutations)

Soit E un ensemble fini. On note $n = \mathrm{Card}(E)$. Le nombre des permutations de E est alors égal à

$$n!$$

Exercice 3. Dans une course de vingt chevaux, combien y-a-t-il de quintés dans l'ordre ? On rappelle qu'un quinté dans l'ordre est un pronostic sur l'arrivée du premier cheval, du deuxième cheval,...,du cinquième cheval.

Exercice 4. On considère un jeu usuel de 52 cartes qu'on mélange et qui servent de « pioche ». Combien y-a-t-il de configurations possibles pour la pioche ?

2.3 Combinaisons

Définition 24. (p-combinaison)

Soit E un ensemble fini, soit p un entier naturel vérifiant $p \leqslant \mathrm{Card}(E)$. On appelle p-combinaison de E une partie de E ayant exactement p éléments.

Exemple 25. Les combinaisons de $\{1,2,3\}$ sont données par

- 0-combinaison : $\emptyset$
- 1-combinaisons : $\{1\},\{2\},\{3\}$
- 2-combinaisons : $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$
- 3-combinaisons : $\{1,2,3\}$.

Exercice 5. Donner toutes les 2-combinaisons de $\{A,T,G,C\}$.

Proposition 26. (Dénombrement des p-combinaisons)

Soit E un ensemble fini de cardinal n, soit p un entier vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre de p-combinaisons de E est égal à

$$\binom{n}{p}.$$

Démonstration. □

Remarque 27. Le terme « p parmi n » vient donc du fait que $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de façons de choisir p éléments parmi n possibles.

Exercice 6. On considère un jeu usuel de 52 cartes. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes possibles ? On rappelle que pour une main, l'ordre dans lequel sont placées les cartes dans la main n'a pas d'importance.

Proposition 28. (Dénombrement de l'ensemble des parties)

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors le nombre de parties de E est égal à

$$2^n.$$

Démonstration. □

Exercice 7. Dans une grille de loterie, on doit cocher 5 numéros. Sachant qu'il y a 49 numéros, combien y-a–t-il de façons de cocher une grille ?

3 Méthodes de calcul

3.1 Pistes de modélisation

La difficulté principale dans un problème de dénombrement est de trouver une bonne façon de représenter toutes les configurations possibles : il faut trouver une manière de compter toutes les configurations une et une seule fois. On présente ce que peuvent modéliser les différents objets présentés.

p-listes

Les p-listes d'un ensemble E permettent de représenter toutes les manières de tirer successivement p objets d'un ensemble E donné, avec répétition éventuel. La seule contrainte sur les objets tirés sont qu'ils appartiennent à l'ensemble E.

Exemple 29. On effectue p tirages successifs avec remises dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

p-listes sans répétition

Les p-listes sans répétition d'un ensemble E permettent de représenter toutes manières de tirer successivement et sans répétition d'un ensemble E donné. La contrainte sur les objets est qu'ils appartiennent à E et qu'ils apparaissent au plus une fois dans la liste.

Exemple 30. On effectue p tirages successifs sans remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

Permutations

Les permutations peuvent être vu comme un cas particulier de p-listes sans répétition. On peut aussi les voir comme les différentes façons de numéroter de 1 à n les élements d'un ensemble E contenant exactement n éléments.

p-combinaisons

Les p-combinaisons de E permettent de représenter toutes les collections d'objets à p éléments de l'ensemble E. On peut remarquer qu'ils permettent également de représenter toutes les p-listes sans répétition de E dans lequel on impose un ordre dans l'écriture des éléments de la liste (par exemple croissant)

Exemple 31. On effectue p tirages « simultanés » dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

union disjointe et complémentaire

Il arrive qu'il soit plus facile de décomposer l'ensemble à dénombrer en une union de sous-parties disjointes deux à deux (c'est une façon d'obtenir le nombre de parties de E). Dans ce cas, on commence par représenter l'ensemble par cette union disjointe et ensuite on compte chacune de ces parties. Ce qui correspond à

$$\text{nbre de possibilités} = (\text{nbre du } 1^{\text{er}} \text{cas}) + (\text{nbre du } 2^{\text{eme}} \text{ cas}) + \cdots + (\text{nbre du dernier cas})$$

Parfois, l'ensemble qui nous intéresse est une partie d'un ensemble dont on connaît le cardinal et dont le complémentaire est plus facile à compter. On peut alors d'abord compter le complémentaire. Ceci correspond à

$$\text{nbre de cas favorables} = (\text{nbre de cas total}) - (\text{nbre de cas défavorables}).$$

produit

Un certain nombre de problèmes se ramène à effectuer plusieurs choix. Si le nombre de nouveaux choix ne dépend pas des valeurs des choix précédents, il est alors possible de ramener le dénombrement à un produit de nombres :

$$\text{nbre de possibilités} = (\text{nbre du } 1^{\text{er}} \text{ choix}) \times (\text{nbre du } 2^{\text{eme}} \text{ choix}) \times \ldots \times (\text{nbre du dernier choix})$$

3.2 Exemples

Les anagrammes

Déterminer le nombre d'anagrammes des mots suivants :

1. « motus » 2. « anagramme» 3. « Pascal Obispo »

Les trinômes de colles

On considère une classe de 48 élèves. Combien y-a-t-il de façons de constituer les 16 trinômes ?

1. On prend en compte la numérotation des différents trinômes.
2. On ne prend pas en compte la numérotation des trinômes.

Les anniversaires

On considère une classe de 48 élèves tous nés en 2003.

1. Combien y-a-t-il de façons d'attribuer à un élève une date d'anniversaire ?
2. Dans combien de cas au moins deux élèves sont nés le même jour ?

Les applications

Soit E un ensemble fini de cardinal p, soit F un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien y-a-t-il d'injections de E dans F ?
3. On se place dans le cas où $p=n+1$. Combien y-a-t-il de surjections de E dans F ?

Une récurrence famillière

On veut dénombrer les séquences à n chiffres constitués uniquement de 0 et de 1 et où il n'y a jamais deux 1 consécutifs. On note F_n l'ensemble correspondant.

1. Expliciter les ensembles F_1, F_2, F_3.
2. Montrer que $F_n = \{w \in F_n | w_n = 0\} \cup \{w \in F_n | w_{n-1} = 0 \text{ et } w_n = 1\}$.
3. En déduire que $\text{Card}(F_n) = \text{Card}(F_{n-1}) + \text{Card}(F_{n-2})$
4. En déduire une expression de F_n en fonction de n.

3.3 Exercices

Exercice 8.

On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air ?

Exercice 9.

Une classe de 24 élèves décident de faire une « tomate géante ». Combien y-a-t-il de façons de former un cercle ? On considère que deux cercles sont identiques si on peut passer de l'un à l'autre en effectuant une rotation de l'un des cercles.

Exercice 10.

Trois étudiants A, B, C doivent se partager 10 bonbons. Combien y-a-t-il de façons de répartir ces bonbons entre eux ? Il est possible qu'un partage ne soit pas équitable au point que l'un d'entre eux n'ait rien. Par contre, tous les bonbons doivent être attribués à un étudiant. Une répartition possible est donnée par $(2, 5, 3)$. Dans ce cas, A a 2 bonbons, B en a 5, et C en a 3.

4 Complément : autour des coefficients binomiaux

Cette partie donne des façons de comprendre les différentes formules vérifiées par les coefficients binomiaux, en leur donnant une interprétation combinatoire (une formule correspond à deux manières différentes de compter un même ensemble).

On fixe $0 \leqslant p \leqslant n$ des entiers.

Symétrie

On rappelle que la symétrie des coefficients binomiaux se traduit par

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Cela peut se traduire par : le nombre de façons de choisir p éléments parmi n qu'on garde est égal au nombre de façons de choisir $n-p$ éléments parmi n qu'on exclut.

Formule du pion

On rappelle que la formule du pion est donnée par

$$\binom{n}{p} \cdot p = n \cdot \binom{n-1}{p-1}.$$

Elle correspond à deux manières différentes de compter le nombre de façons de créer un comité à p personnes constituée de 1 président et de $p-1$ conseillers, qu'on choisit parmi n personnes possibles. La première façon correspond à : on choisit d'abord le comité, puis on choisit le président parmi ces pesonnes. La deuxième façon correspond à : on choisit d'abord le président, puis on choisit $p-1$ conseillers parmi les $n-1$ personnes restantes.

Triangle de Pascal

On rappelle que la formule du triangle de Pascal est donnée par

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Elle correspond à une disjonction de cas sur l'ensemble des p-combinaisons. On se donne E un ensemble à n éléments, et on fixe a un élément de E. Pour une p-combinaison C de E, il y a deux possibilités : soit a est un élement de C, soit a n'est pas un élément de C, ces deux cas s'excluant mutuellement. On pourra constater qu'il y a exactement autant de p-combinaisons de E contenant a que de $p-1$ combinaisons de $E \backslash \{a\}$, et qu'il y a autant de p-combinaisons de E ne contenant pas a que de p-combinaisons de $E \backslash \{a\}$. Ce qui explique la formule du triangle de Pascal.

Formule du binôme

On fixe x, y des nombres complexes. On rappelle que la formule du binôme est donnée par

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

On peut la comprendre comme toutes les façons de constituer un mot de longueur n où les lettres sont données par x et y.

- Pour le terme $(x+y)^n$, cela se comprend : pour la première lettre je peux choisir entre x et y, pour la deuxième lettre je peux choisir entre la lettre entre x et y,…, pour la n-ième lettre, je peux choisir entre la lettre x et y.

- Pour le terme de droite, on peut le comprendre ainsi : il y a $n+1$ possibilités qui correspond au nombre de x présents dans le mots. Compter le nombre de mots ayant exactement k x revient à compter le nombre de façons de choisir les positions des k x dans un mot, ce qui donne $\binom{n}{k}$.