Méthodes de démonstration

Résumé

Grâce à la logique et aux ensembles, il nous est maintenant possible de formuler des propositions mathématiques de manière rigoureuse. Reste à vérifier la validité d'une proposition. Pour cela, les règles de la logique nous permettent de construire des modes de raisonnement. Dans la suite, on présente différentes méthodes de démonstration, accompagnées de conseils de rédaction et de lecture. La liste donnée n'est pas exhaustive, et on illustre chaque type de raisonnement par un exemple.

1 Démontrer $(P \Rightarrow Q)$

1.1 Une démonstration directe

Une démonstration directe consiste à partir de l'hypothèse P, puis à l'aide de justifications successives à aboutir à la conclusion Q.

Exemple 1. Soit ABC un triangle. Montrer que :

$$(\text{ABC est rectangle en } A) \Rightarrow (\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = \text{BC}^2)$$

1.2 Une démonstration par la contraposée

D'un point de vue logique, les propositions $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont équivalentes. Il est parfois plus facile de démontrer cette dernière proposition. Ce mode de démonstration est appelée « une démonstration par la contraposée ».

Exemple 2. Soient x, y des réels positifs. Montrer que si $x \neq y$ alors $x^2 \neq y^2$.

2 Démontrer $(P \Leftrightarrow Q)$

2.1 Une démonstration par équivalence

Une démonstration par équivalence consiste à partir de la proposition P, et par équivalences successives à aboutir à la proposition Q. Ce mode de raisonnement est à utiliser avec précaution, la validité de la réciproque n'étant pas toujours évidente.

Exemple 3. On fixe x un nombre réel. Montrer que $((x^2 + 2x - 3 = 0) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -3))$.

2.2 Une démonstration par double implication

D'un point de vue logique, les propositions $(P \Leftrightarrow Q)$ et $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$ sont équivalentes. Démontrer une équivalence par double implication consiste à démontrer cette dernière proposition.

Exemple 4. Soit ABC un triangle. Montrer que :

$$(\text{ABC est rectangle en } A) \Leftrightarrow (\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = \text{BC}^2).$$

3 Démontrer « $\forall x \in E, P(x)$ »

3.1 Une démonstration directe

La structure de ce type de démonstration est la suivante :

- elle commence par « soit x un élément de E.»
- elle poursuit par le cœur de la démonstration,
- elle conclut par une phrase du type « la démonstration donnée étant valide pour tout élément de E, on en conclut que : $\forall x \in E, P(x)$ ». (parfois, pour abréger on peut écrire : « on en déduit que : $\forall x \in E, P(x)$ »)

Remarque. on peut faire le lien avec la démonstration d'une implication : cela revient à démontrer que $(x \in E) \Rightarrow (x \text{ vérifie } P)$ est une proposition valide. Autrement dit, la proposition « si x est un élément de E alors x vérifie P » est vraie.

Exemple 5. Montrer que pour tout quadruplet de réels (a, b, c, d) :

$$(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d.$$

On pourra admettre deux propriétés : l'associativité de l'addition et la distributivité du produit sur l'addition.

3.2 Une démonstration par récurrence

Il n'est pas toujours possible de trouver une démonstration directe pour une proposition de la forme «$\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ ». On peut procéder différemment : par récurrence. Elle est basée sur le principe suivant : $(\forall n \in P(n))$ et $(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1))))$ sont deux propositions logiquement équivalente. La structure de ce type de démonstration est la suivante :

- Initialisation : « montrons que $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : « soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est alors vraie.
- Conclusion : «d'après le principe de récurrence, on en conclut que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. »

Exemple 6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3.3 Une démonstration par disjonction de cas

Il n'est pas toujours possible de démontrer de manière directe une proposition « $\forall x \in E, P(x)$ », les hypothèses sur les éléments de E étant « trop faibles ». En remarquant que $E = A \cup B$, il est alors possible de démontrer « $\forall x \in E, (x \in A, P(x)) \vee (x \in B, P(x))$. Dans le cas où A et B sont bien choisis, cette dernière proposition est plus facilement démontrable. La structure de ce type de démonstration est la suivante :

- soit x un élement de E.

- Cas 1 : x est un élément de A. …
- Cas 2 : x est un élément de B. …
- Conclusion partielle : par disjonction de cas, on en déduit que x vérifie P.
- Conclusion générale : la démonstration précédente étant valide pour tout élément de E, on en conclut que : $\forall x \in E, P(x)$.

Remarque. Il arrive régulièrement que la conclusion partielle et générale soient regroupées ainsi :

« par disjonction de cas, on en conclut que : $\forall x \in E, P(x)$ ».

On peut faire le lien avec la logique propositionnelle de la manière suivante :

$$((x \in E) \Rightarrow P(x)) \equiv (((x \in A) \vee (x \in B)) \Rightarrow P(x)) \equiv ((x \in A) \Rightarrow P(x)) \wedge ((x \in B) \Rightarrow P(x)).$$

Exemple 7. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.

4 Démontrer « $\exists x \in E, P(x)$ »

4.1 Une démonstration directe

Par définition, « il suffit » d'expliciter un élément x appartenant à E et de vérifier que $P(x)$ est vraie. La structure de ce type de démonstration est la suivante :

- Posons $x =$ (ou on définit x par…)
- Montrons que x vérifie P
- On en conclut que : $\exists x \in E, P(x)$.

Exemple 8. On fixe x un nombre réel. Montrer qu'il existe un entier n vérifiant $x < n$.

4.2 Une démonstration par analyse-synthèse

Constatons que dans une démonstration directe, il n'est pas donné de méthode pour trouver une valeur de x. La méthode par analyse-synthèse permet d'avoir des conditions nécessaires pour trouver plus facilement une valeur de x. La structure de ce type de démonstration est la suivante :

- Analyse : supposons que x vérifie P. Nécessairement …
- Synthèse : posons $x = \cdots$. Montrons que x vérifie P.
- On en conclut que : $\exists x \in E, P(x)$.

Remarque. Il est possible de faire l'analyse au brouillon, et de rédiger uniquement la partie synthèse. Dans ce cas, cela revient à présenter un raisonnement direct pour le lecteur/correcteur.

Exemple 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x = \sqrt{x^2 + 1}$.

5 Bonus : une démonstration par l'absurde

On cherche à montrer que la proposition P est vraie. De manière générale, P est une proposition vraie ou fausse, ces deux valeurs de vérité s'excluant mutuellement. Lors d'une démonstration par l'absurde, on démontre $(\neg P \Rightarrow F)$. Donc la valeur de vérité de $(\neg P \Rightarrow F)$ est égale à V. Or ceci est possible si et seulement si P est vraie. On en conclut que P est vraie. La structure de ce type démonstration est la suivante :

- Supposons $\neg P$.
- … on aboutit à une contradiction (par exemple, 1=2)
- Conclusion : par l'absurde, on en déduit que P est vraie.

Exemple 10. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- 0 est un élément de A,
- pour tout $n \in A$, si n est un élément de A alors $n+1$ est un élément de A.

Montrer par l'absurde que $A = \mathbb{N}$. On rappelle que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.