Ensemble des nombres réels

Résumé

On suppose connu l'existence des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. On rappelle les différentes propriétés des opérations usuelles, des relations d'ordre $\leqslant, \geqslant$ et des relations d'ordre strictes $<, >$. On définit ensuite divers objets à l'aide d'une relation d'ordre, on rappelle les calculs sur les puissances. Enfin, on donne quelques exemples de résolutions d'équations et d'inéquations.

1 Rappels

1.1 Ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

On rappelle que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : ce sont les nombres qu'on utilise pour compter.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers (relatifs). Il permet de représenter toutes les différences d'entiers naturels.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels. Il permet de représenter tous les quotients (ou rapport) de nombres entiers.

L'ensemble $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Il permet de représenter tous les nombres avec une infinité de décimales.

On rappelle qu'on a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1.

- $0, 1, 2, \ldots$ sont des entiers naturels.
- $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ sont des entiers relatifs.
- $\frac{-7}{4}, -1, -\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{3}$ sont des nombres rationnels.
- $\sqrt{2}$, π,e sont des nombres réels.

Pour $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, on rappelle que $A^\star$ désigne l'ensemble $A \backslash \{0\}$.

1.2 Opérations sur les nombres

On rappelle que l'ensemble des nombres réels est muni deux opérations fondamentales : l'addition, et la multiplication. Les opérations de soustraction et de division peuvent être déduites de ces dernières.

Proposition 2. (propriétés de l'addition)

- *Soient a, b, c des nombres réels. Alors : $(a + b) + c = a + (b + c)$. (associativité)*
- *Soient a, b des réels. Alors : $a + b = b + a$. (commutativité)*
- *Le nombre 0 vérifie : $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a$. (0 est élément neutre pour l'addition)*
- *Soit a un réel. Il existe un unique réel b vérifiant : $a + b = b + a = 0$. b est appelé opposé de a, il est noté $-a$.*

Proposition 3. (propriétés de la multiplication)

- *Soient a, b, c des nombres réels. Alors : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (associativité)*
- *Soient a, b des réels. Alors : $a \cdot b = b \cdot a$. (commutativité)*
- *Le nombre 0 vérifie : $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. (0 est absorbant pour la multiplication)*

- *Le nombre 1 vérifie :* $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. *(1 est élément neutre pour la multiplication)*

- *Soit a un réel non nul. Il existe un unique réel b vérifiant :* $a \cdot b = b \cdot a = 1$. *$b$ est appelé inverse de a, il est noté* $\frac{1}{a}$ *ou* a^{-1}.

Proposition 4. (règles de calcul usuelles)

- *Soient a, b, c des réels. Alors :* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. *(distributivité)*

- *Soient a, b, c, d des réels. Alors :* $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

- *Soit* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^\star$. *Alors :* $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$.

1.3 Relations d'ordre et d'ordre strictes sur les nombres

On rappelle qu'il existe des relations d'ordre et d'ordre strictes $\leqslant, \geqslant, <, >$.

Exemple 5. On a $1 < 2,\ 2 \leqslant 4,\ 3 > 1,\ 4,4 \geqslant -4,\ -3,5 \leqslant 0 \leqslant 2,3$.

On rappelle les propriétés de la relation $\leqslant$.

Proposition 6. (propriétés de la relation d'ordre $\leqslant$)

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a :* $x \leqslant x$.

- *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On a :* $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)) \Rightarrow (x = y)$.

- *Soit* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a :* $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z)) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

- *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On a :* $(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$.

Proposition 7. (propriétés algébriques de la relation $\leqslant$)

- *Soient x, y, z des réels. On a :* $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (x + z \leqslant y + z)$.

- *Soient x,y des réels. On a :* $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (-x \geqslant -y)$.

- *Soient x, y des réels. Soit* $a > 0$. *On a :* $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (a \cdot x \leqslant a \cdot y)$.

2 Objets définis à l'aide d'un ordre

2.1 Majorant, minorant...

Définition 8. (majorant, minorant)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- *On dit qu'un nombre réel M est un majorant de A si :* $\forall a \in A, a \leqslant M$.

- *On dit qu'un nombre réel m est un minorant de A si :* $\forall a \in A, m \leqslant a$.

Définition 9. (borne supérieure, borne inférieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- *On note* $B_A = \{M \in \mathbb{R}, M\, \textit{majorant de}\, A\}$. *On dit qu'un nombre réel S est une borne supérieure de A si :*

$$(\forall a \in A, a \leqslant S) \wedge (\forall M \in B_A, S \leqslant M).$$

Autrement dit, S est le plus petit des majorant de A. Il est noté $\sup(A)$.

- *On note $C_A = \{m \in \mathbb{R}, m\, minorant\ de A\}$. On dit qu'un nombre réel I est une borne inférieure de A si :*

$$(\forall a \in A, I \leqslant a) \wedge (\forall m \in C_A, m \leqslant I).$$

Autrement dit, I est le plus grand des minorants de A. Il est noté $\inf(A)$.

Proposition 10. (Unicité sous réserve d'existence du sup, de l'inf)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- *Si A admet une borne supérieure, alors elle est unique.*
- *Si A admet une borne inférieure, alors elle est unique.*

Démonstration. □

Exemple 11. On pose $I = \{x \in \mathbb{R}, x < 45\}$. 45 est la borne supérieure de I. I n'a pas de borne inférieure.

Définition 12. (maximum, minimum)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- *On dit qu'un réel M est le maximum (ou plus grand élément) de A si M est la borne supérieur de A et est un élément de A. Il est noté* $\max(A)$.
- *On dit qu'un réel m est le maximum (ou plus petit élémentà de A si m est la borne inférieure de A et est un élément de A. Il est noté* $\min(A)$.

Théorème 13. (propriété du bon ordre)

Toute partie non vide $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Toute partie non vide et finie de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Démonstration. ADMIS □

Théorème 14. (propriété de la borne supérieure)

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Démonstration. ADMIS □

Exercice 1. Montrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exercice 2. Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de :

1. $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$ 2. $\{x \in \mathbb{R}, 3 \leqslant x < 5\}$ 3. $\{(-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$

Préciser si ce sont des maximums ou des minimums.

2.2 Intervalles

Définition 15. (intervalle)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si I vérifie la propriété suivantes :

$$\forall (a, b) \in I^2, \{x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\} \subset I.$$

Proposition 16. (forme des intervalles)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $I=\{x\in\mathbb{R}, a\leqslant x\leqslant b\}$ 2. *ou* $I=\{x\in\mathbb{R}, a<x\leqslant b\}$ 3. *ou* $I=\{x\in\mathbb{R}, a\leqslant x<b\}$
4. *ou* $I=\{x\in\mathbb{R}, a<x<b\}$ 5. *ou* $I=\{x\in\mathbb{R}, x\leqslant b\}$ 6. *ou* $I=\{x\in\mathbb{R}, x<b\}$
7. *ou* $I=\{x\in\mathbb{R}, a\leqslant x\}$ 8. *ou* $I=\{x\in\mathbb{R}, a<x\}$ 9. *ou* $I=\mathbb{R}$
10. *ou* $I=\emptyset$.

Chacun de ces ensembles étant noté respectivement :

1. $[a,b]$ 2. $]a,b]$ 3. $[a,b[$ 4. $]a,b[$ 5. $]-\infty,b]$ 6. $]-\infty,b[$ 7. $[a,+\infty[$
8. $]a,+\infty[$.

Démonstration. □

2.3 Valeur absolue

Définition 17. (valeur absolue)

Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x (notée $|x|$) le nombre défini par :

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{sinon}\end{cases}$$

Exemple 18. On a $|3|=3, |-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$.

Proposition 19. (propriétés de la valeur absolue)

Soient x et y des réels. Alors :

1. $|x|=\max(x,-x)$ 2. $(|x|=0)\Leftrightarrow(x=0)$ 3. $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ *(inégalité triangulaire)*
4. $|x|=|-x|$ 5. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ 6. $||x|-|y||\leqslant|x-y|$ *(inégalité triangulaire forme deux)*

Démonstration. □

Exercice 3. Soient a,b des réels et $\varepsilon>0$. Montrer que : $(a\in[b-\varepsilon,b+\varepsilon])\Leftrightarrow(|b-a|\leqslant\varepsilon)$.

2.4 Partie entière

Définition 20. (partie entière)

Soit x un nombre réel. On appelle partie entière de x (notée $\lfloor x\rfloor$) l'unique entier vérifiant :

$$\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1.$$

Autrement dit, $\lfloor x\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exemple 21. On a : $\lfloor\sqrt{3}\rfloor=1, \lfloor-3,4\rfloor=-4$.

Exercice 4. On admet que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. Montrer l'existence et l'unicité d'une partie entière.

Exercice 5. Soient x,y des réels. Montrer que $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor$.

3 Fonctions puissances

3.1 Puissances entières

Définition 22. (puissance entière positive)

Soit x un nombre réel, soit n un entier naturel. On appelle x à la puissance n (qu'on note x^n) le nombre réel défini par :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}_{n-1 \text{multiplications}}.$$

x^n est donc le nombre obtenu en multipliant x par lui-même n fois.

Par convention, $x^0 = 1$.

Exemple 23. On a : $3^2 = 9, 2^3 = 8$.

Définition 24. (puissance entière strictement négative)

Soit x un réel non nul, soit n un entier naturel non nul. On appelle x à la puissance $-n$ (qu'on note x^{-n}) le nombre réel défini par :

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

En particulier, x^{-1} désigne l'inverse de x.

Exemple 25. On a : $5^{-2} = \frac{1}{25}, \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\frac{27}{8}$.

Proposition 26. (propriétés algébriques des fonctions puissances entières)

Soient x, y des réels non nuls, soient n, m des entiers naturels non nuls. Alors :

1. $x^{n+m} = x^n x^m$ *2.* $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$ *3.* $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

Démonstration. □

Proposition 27. (identités remarquables)

Soient x, y des réels. Alors :

1. $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2x \cdot y$ *2.* $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2x \cdot y$ *3.* $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

Démonstration. □

Exercice 6. Soient x, y, z des réels. Montrer que $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z$.

3.2 Racine n-ième

Définition 28. (racine carrée)

Soit x un nombre réel positif. On appelle racine carrée de x l'unique réel positif y vérifiant :

$$y^2 = x$$

Il est noté $\sqrt{x}$.

Démonstration. Qu'est-ce qu'il faudrait démontrer ? □

Exercice 7. Soient x, y des réels strictement positifs différents. Montrer que :

- $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ • $\sqrt{x}-\sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ • $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Définition 29. (racine cubique)
Soit x un nombre réel. On appelle racine cubique de x l'unique réel y vérifiant :

$$y^3 = x.$$

Il est noté $\sqrt[3]{x}$.

Démonstration. □

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Définir de manière similaire la racine n-ième d'un nombre réel positif x. On le note $\sqrt[n]{x}$.
2. Dans quel cas peut-on définir la racine n-ième d'un nombre réel négatif ?

Proposition 30. (propriétés de la racine carrée)

- *Soit x un réel. Alors :* $\sqrt{x^2} = |x|$.
- *Soient x, y des réels positifs. Alors :* $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

Démonstration. □

Exercice 9. Soient x, y des réels.

1. Montrer que $\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x$. 2. Montrer que $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$.

4 Résolution d'équations et d'inéquations

On présente la résolution d'équations et d'inéquations à travers différents exercices : on suppose connu les différentes méthodes de résolution.

4.1 Résolution d'équations

Exercice 10. Résoudre les équations d'inconnu réel x suivantes :

1. $3x+7=-2$ 2. $(3x-1)\cdot(x+3)=0$ 3. $x^2-3x+2=0$ 4. $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$

5. $x^2+x+2=0$ 6. $\left|x-\frac{2}{3}\right|=2$ 7. $\left|x-\frac{1}{2}\right|=|2x-1|$ 8. $\sqrt{2x+3}=x$

Exercice 11. Résoudre les équation d'inconnu réel x et de paramètre réel m suivantes :

1. $m\cdot x$+2=3 2. $|x-m|=|2\cdot x+m|$ 3. $x^2+x+m=0$ 4. $x^2+m\cdot x+1=0$

4.2 Résolution d'inéquations

Exercice 12. Résoudre les inéquations d'inconnu réel x suivantes :

1. $-3x+5\leqslant\frac{2}{7}$ 2. $\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2x+\frac{1}{5}\right)\leqslant 0$ 3. $|x+2|\geqslant\left|\frac{x}{2}+3\right|$ 4. $x^2-4x+2\geqslant 0$

5. $\frac{3x-1}{2x+5}\leqslant 1$ 6. $\sqrt{2x+1}\leqslant x$.

Exercice 13. Résoudre les inéquation d'inconnu réel x et de paramètre réel m suivantes :

1. $m\cdot x+2\geqslant 3$ 2. $x^2-m^2\geqslant 0$ 3. $|x+1|\leqslant|x+m|$