Ch 3 : Ensemble des nombres réels

Éléments de correction des exercices :

Exo 11.

1. $E_1 : mx + 2 = 3.$ $\qquad E_1 \Leftrightarrow mx = -1.$

Cas 1 : $m \neq 0$.

$E_1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$

cas 2 : $m = 0$.

$E_1 \Leftrightarrow 0 = -1.$

Donc :

$$\boxed{S = \begin{cases} \left\{-\frac{1}{m}\right\} & \text{si } m \neq 0 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. $E_2 : |x - m| = |2x + m|$.

$E_2 \Leftrightarrow |x-m|^2 = |2x+m|^2$ (car $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{|a|^2} = |a|$)

$\Leftrightarrow (x-m)^2 = (2x+m)^2$

$\Leftrightarrow (x-m)^2 - (2x+m)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - m - (2x+m))(x - m + (2x+m)) = 0$

$\Leftrightarrow (-x - 2m)(3x) = 0$

$\Leftrightarrow -x - 2m = 0$ ou $3x = 0$ (car $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$)

$\Leftrightarrow x = -2m$ ou $x = 0$.

Donc : $\boxed{S = \{0, -2m\}.}$

3. $E_3 : x^2 + x + m = 0$.

On reconnaît une équation polynomiale du second degré de discriminant $\Delta = 1 - 4m$. Donc :

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 > 4m \Leftrightarrow \frac{1}{4} > m$.

Cas 1 : $\frac{1}{4} > m$.

Δ est alors strictement positif et E_3 admet exactement deux solutions réelles : $\frac{-1+\sqrt{1-4m}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{1-4m}}{2}$. Autrement dit :

$$E_3 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{1-4m}}{2} \text{ ou } x = \frac{-1-\sqrt{1-4m}}{2}.$$

Donc :

$$S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{1-4m}}{2} , \frac{-1-\sqrt{1-4m}}{2} \right\}.$$

Cas 2 : $m = \frac{1}{4}$.

Δ est alors nul, et on a alors :

$$E_3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Donc : $S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Cas 3 : $\frac{1}{4} < m$.

on a alors $\Delta < 0$. Dans ce cas, E_3 n'a pas de solution.

Donc :

$$E_3 \Leftrightarrow \text{FAUX}.$$

Donc : $S = \emptyset$.

En résumé :

m	$m < 1/4$	$m = 1/4$	$m > 1/4$
$S =$	$\left\{ \frac{-1+\sqrt{1-4m}}{2}, \frac{-1-\sqrt{1-4m}}{2} \right\}$	$\left\{ -\frac{1}{2} \right\}$	$\emptyset$

4. $E_4 : x^2 + mx + 1 = 0$.

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = m^2 - 4$. On a :

- $\Delta > 0 \iff (m-2)(m+2) > 0 \iff m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.
- $\Delta = 0 \iff m = 2$ ou $m = -2$.
- $\Delta < 0 \iff m \in]-2, 2[$.

Cas 1 : $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Dans ce cas :

$$E_4 \iff x = \frac{-m + \sqrt{m^2-4}}{2} \text{ ou } x = \frac{-m - \sqrt{m^2-4}}{2}.$$

Cas 2 : $m = 2$ ou $m = -2$

$$E_4 \iff x = -\frac{m}{2}$$

Cas 3 : $m \in]-2, 2[$.

$$E_4 \iff \text{FAUX}.$$

En résumé :

m :	$m < -2$ ou $m > 2$	$m = 2$ ou -2	$-2 < m < 2$
$S =$	$\left\{\frac{-m+\sqrt{m^2-4}}{2}, \frac{-m-\sqrt{m^2-4}}{2}\right\}$	$\left\{-\frac{m}{2}\right\}$	$\emptyset$

Exo 12

1. $I_1 = -3x + 5 \leq \frac{2}{7}$.

On a :

$$I_1 \Leftrightarrow -3x \leq \frac{2}{7} - 5 \Leftrightarrow -3x \leq \frac{2-5\times 7}{7}$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq \frac{-33}{7} \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{7}.$$

Donc $S = [\frac{11}{7}, +\infty[$.

2. $(x-\frac{1}{3})(2x+\frac{1}{5}) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Donc : $S = [-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}]$

3. $I_3 : |x+2| \geq |\frac{x}{2}+3|$.

Les valeurs absolues étant positives et la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$I_3 \Leftrightarrow |x+2|^2 \geq |\frac{x}{2}+3|^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \geq (\frac{x}{2}+3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - (\frac{x}{2}+3)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2-(\frac{x}{2}+3))(x+2+(\frac{x}{2}+3)) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{x}{2}-1)(\frac{3x}{2}+5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x+10) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{10}{3}] \cup [2, +\infty[.$$

Donc : $S =]-\infty, -\frac{10}{3}] \cup [2, +\infty[$.

4. $I_4 : x^2 - 4x + 2 \geq 0.$

Étudions l'équation du second degré associée à I_4.

On a :

$$E_4 : x^2 - 4x + 2 = 0.$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 2 = 8 > 0.$$

On a donc :

$$E_4 \iff x = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} \text{ ou } x = \frac{4 + \sqrt{8}}{2}$$

$$\iff x = 2 - \sqrt{2} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{2}$$

On en déduit que : $I_4 \iff x \in]-\infty, 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}, +\infty[.$

$$S =]-\infty, 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}, +\infty[.$$

5. $I_5 : \dfrac{3x - 1}{2x + 5} \leq 1$

$$I_5 \iff \frac{3x - 1}{2x + 5} - 1 \leq 0 \iff \frac{3x - 1}{2x + 5} - \frac{2x + 5}{2x + 5} \leq 0$$

$$\iff \frac{x - 6}{2x + 5} \leq 0 \iff x \in \left] -\frac{5}{2}, 6 \right].$$

$$S = \left] -\frac{5}{2}, 6 \right]$$

6. $I_6 : \sqrt{2x+1} \leq x$ définie pour $x \geq -\frac{1}{2}$.

Par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$I_6 \iff \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \leq x^2 \text{ et } x \geq 0.$$

$$\iff 2x + 1 \leq x^2 \text{ et } x \geq 0 \iff 0 \leq x^2 - 2x - 1 \text{ et } x \geq 0$$

étudions $x^2-2x-1 \geq 0$.

L'équation correspondante est donnée par $x^2-2x-1=0$

et a pour discriminant $\Delta = 4-(-1)\times 4 = 8 > 0$.

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2} \quad , \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}.$$

Donc : $x^2-2x-1 \geq 0 \iff x \in]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[$.

Donc : $I_6 \iff x \in]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[$ et $x \geq 0$.

Donc : $I_6 \iff x \in [1+\sqrt{2}, +\infty[$.

Donc :

$$S = [1+\sqrt{2}, +\infty[.$$

Exo 13.

1. $I_1 : mx+2 \geq 3 \iff mx \geq 1$

cas 1 : $m < 0$. cas 2 : $m = 0$ cas 3 : $m > 0$

$I_1 \iff x \leq \frac{1}{m}$ $I_1 \iff$ FAUX $I_1 \iff x \geq \frac{1}{m}$

En résumé :

$$S = \begin{cases}]-\infty, \frac{1}{m}] & \text{si } m < 0 \\ \emptyset & \text{si } m = 0 \\ [\frac{1}{m}, +\infty[& \text{si } m > 0 \end{cases}$$

2. $I_2 : x^2 - m^2 \geq 0$.

$I_2 \Leftrightarrow (x-m)(x+m) \geq 0$.

Donc :

$$S = \begin{cases} [-m, m] \text{ si } m \geq 0 \\ [m, -m] \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\left(S = [-|m|, |m|] \right).$$

3. $I_3 : |x+1| \leq |x+m|$

Par st ↗ de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$I_3 \Leftrightarrow |x+1|^2 \leq |x+m|^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq (x+m)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (x+m)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1-(x+m))(x+1+(x+m)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m)(2x+m+1) \leq 0.$$

Cas 1 : $m < 1$.

$I_4 \Leftrightarrow 2x + m + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{(m+1)}{2}$

Cas 2 : $m = 1$

$I_4 \Leftrightarrow 0 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ VRAI.

Cas 3 : $m > 1$.

$I_4 \Leftrightarrow 2x + m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{(m+1)}{2}$.

m :	$m < 1$	$m = 1$	$m > 1$
$S =$	$\left]-\infty, -\frac{(m+1)}{2}\right]$	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{(m+1)}{2}, +\infty\right[$.