Trigonométrie

Résumé

On rappelle les définitions des différentes fonctions trigonométriques et leurs symétries. On énonce ensuite leurs propriétés algébriques, et donne quelques méthodes de résolution d'équations et d'inéquations.

1 Définitions et symétries des fonctions trigonométriques

On suppose connu les notions élémentaires de géométrie (angle, repère, droite, cercle, vecteur, produit scalaire, arc de cercle etc.)

1.1 Définitions des fonctions trigonométriques

Définition 1. (cosinus, sinus, tangente)

Soit θ *un réel quelconque. Soit* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *un repère orthonormé direct du plan, soit* $\mathcal{C}$ *le cercle de centre* O *et de rayon* 1*. On note* $M(\theta)$ *le point obtenu en parcourant de* θ *le cercle* $\mathcal{C}$*, en partant du point de coordonnées* $(1, 0)$*. On appelle :*

- *cosinus de l'angle* θ *l'abscisse de* $M(\theta)$*, il est noté* $\cos(\theta)$*,*
- *sinus de l'angle* θ *l'ordonnée de* $M(\theta)$*, il est noté* $\sin(\theta)$*,*
- *tangente de l'angle* θ *le rapport* $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$*, qui est définie pour* $\cos(\theta) \neq 0$*. Elle est notée* $\tan(\theta)$*.*

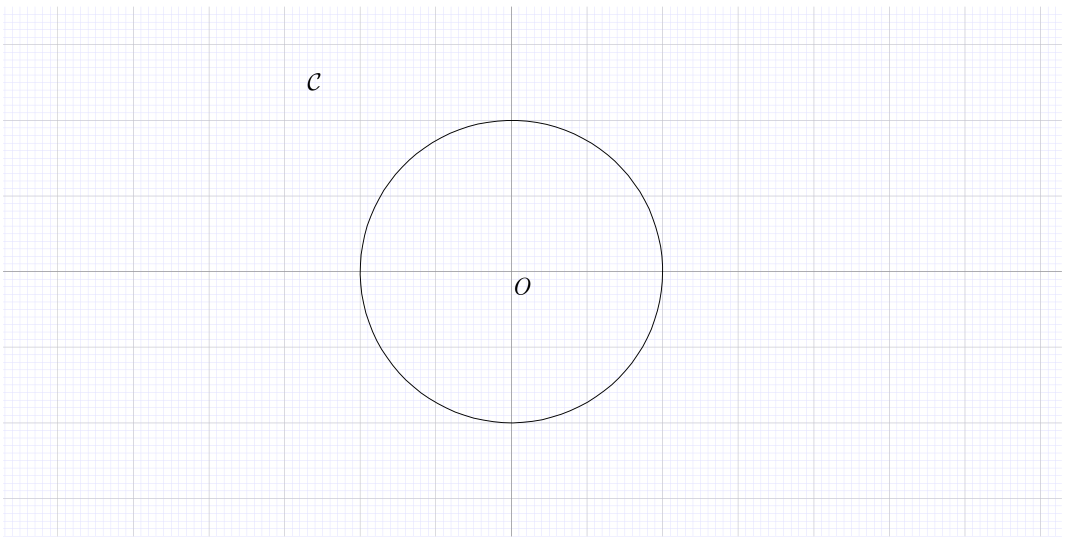

Figure 1. *Représentation graphique du cercle trigonométrique*

Proposition 2. (valeurs remarquables)

Il existe un certain nombre de valeurs remarquables de cos,sin,tan :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$N.D$

Tableau 1.

1.2 Symétries des fonctions trigonométriques

Proposition 3. (symétries de la fonction cos)
Soit θ un nombre réel. Alors :

1. $\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta)$ *2.* $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ *3.* $\cos(\theta+\pi)=-\cos(\theta)$

4. $\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$ *5.* $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\theta)$ *6.* $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$

Démonstration. □

Proposition 4. (symétries de la fonction sin)
Soit θ un nombre réel. Alors :

1. $\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta)$ *2.* $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$ *3.* $\sin(\theta+\pi)=-\sin(\theta)$

4. $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$ *5.* $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\theta)$ *6.* $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$

Démonstration. □

Proposition 5. (symétries de la fonction tan)
Soit θ un réel vérifiant $\cos(\theta)\neq 0$. *Alors :*

1. $\tan(\theta+\pi)=\tan(\theta)$ *2.* $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ *3.* $\tan(\pi-\theta)=-\tan(\theta)$

Démonstration. □

Exercice 1. Donner les valeurs de $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{16\pi}{6}\right), \tan\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

Exercice 2. Soit θ un réel tel que $\sin(\theta)\neq 0$ et $\cos(\theta)\neq 0$. Exprimer $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

2 Identités algébriques

Proposition 6. (théorème de Pythagore)
Soit θ un nombre réel. Alors :

$$\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2=1.$$

Démonstration. □

Proposition 7. (formules d'addition)
Soient α, β des réels. Alors :

1. $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$ *2.* $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$

3. $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ *4.* $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$.

Démonstration. □

Proposition 8. (formules de duplication)
Soit θ un nombre réel. Alors :

1. $\cos(2\theta)=\cos(\theta)^2-\sin(\theta)^2=2\cos(\theta)^2-1=1-2\sin(\theta)^2$

2. $\sin(2\theta)=2\cdot\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Démonstration. □

Exercice 3. Soit θ un réel.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 4. Soient p, q des réels.

1. Montrer que $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. On pourra trouver α et β vérifiant $p = \alpha + \beta$ et $q = \alpha - \beta$.
2. Trouver une formule similaire pour $\sin(p) + \sin(q)$.

Exercice 5. Soit θ un réel vérifiant $\cos(\theta) \neq 0$. Montrer que : $\frac{1}{\cos(\theta)^2} = 1 + \tan(\theta)^2$.

Exercice 6. Soient α, β des réels tels que $\tan(\alpha), \tan(\beta)$ et $\tan(\alpha + \beta)$ soient bien définies. Montrer que :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

3 Résolution d'équations et d'inéquations

3.1 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 9. (arccosinus)

Soit $x_0 \in [-1, 1]$. *On considère l'équation d'inconnu* θ *réel* $E_c : \cos(\theta) = x_0$.

Il existe un unique $\theta_0 \in [0, \pi]$ *vérifiant l'équation* E_c. *Le réel* θ_0 *est appelé arccosinus de* x_0. *Il est noté* $\arccos(x_0)$.

Définition 10. (arcsinus)

Soit $y_0 \in [-1, 1]$. *On considère l'équation d'inconnu* θ *réel* E_s : $\sin(\theta) = y_0$.

Il existe un unique $\theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *vérifiant l'équation* E_s. *Le réel* θ_0 *est appelé arcsinus de* y_0. *Il est noté* $\arcsin(y_0)$.

Définition 11. (arctangente)

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. *On considère l'équation d'inconnu* θ *réel* E_t : $\tan(\theta) = t_0$.

Il existe un unique $\theta_0 \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *vérifiant* E_t. *Le réel* θ_0 *est appelé arctangente de* t_0. *Il est noté* $\arctan(t_0)$.

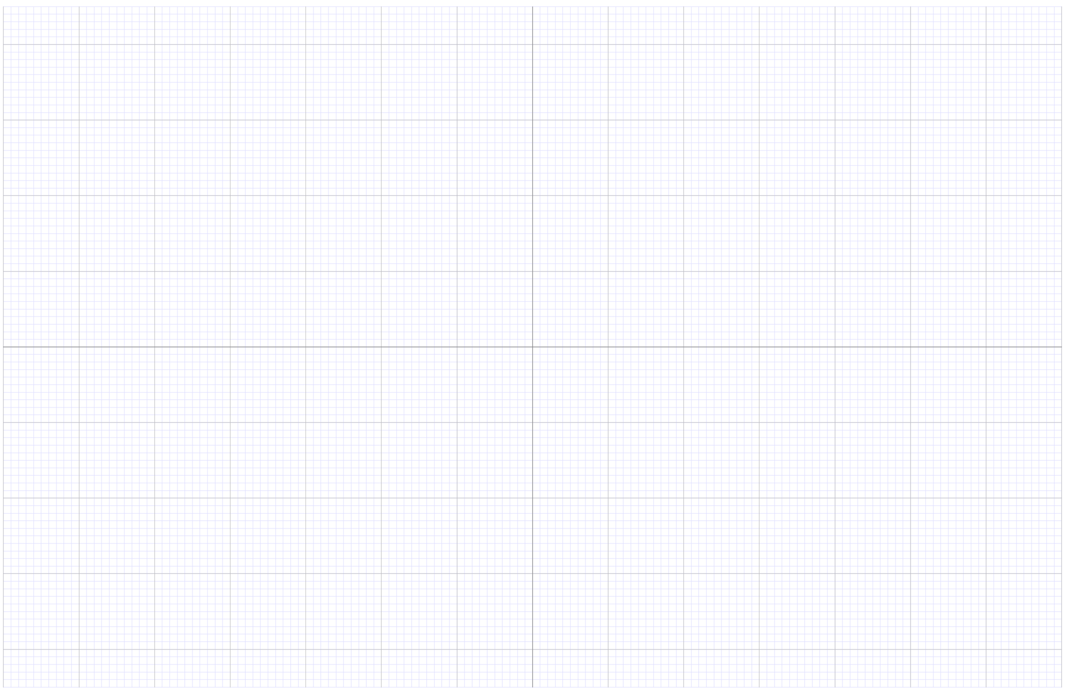

Figure 2. Représentation géométriques des différents arcs

Exercice 7. Calculer :

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ 2. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 3. $\arctan(-1)$. 4. $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \arctan(\sqrt{3})$.

Exercice 8. Soit $x_0 \in [-1, 1]$.

1. Montrer que $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x_0)$ est un élément de $[0, \pi]$.
2. Montrer que θ_0 est solution de l'équation d'inconnu θ réel : $\cos(\theta) = x_0$.
3. En déduire que θ_0 est égal à $\arccos(x_0)$.
4. Déduire des questions précédentes que pour tout $x_0 \in [-1, 1]$: $\arccos(x_0) + \arcsin(x_0) = \frac{\pi}{2}$.

3.2 Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 12. (équation $\cos(\theta) = c$)
Soit $c \in [-1, 1]$. L'ensemble des solutions de l'équation d'inconnu θ réel $(\cos(\theta) = c)$ est égal à

$$S = \{\arccos(c) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos(c) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. □

Proposition 13. (équation $\sin(\theta) = s$)
Soit $s \in [-1, 1]$. L'ensemble des solutions de l'équation d'inconnu θ réel $(\sin(\theta) = s)$ est égal à

$$S = \{\arccos(s) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(s) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. □

Proposition 14. (équation $\tan(\theta) = t$)
Soit $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de l'équation d'inconnu θ réel $(\tan(\theta) = t)$ est égal à

$$S = \{\arctan(t) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. □

Proposition 15. (transformation de $a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)$)
Soient a, b, θ des réels. Il existe alors r et φ des réels vérifiant :

$$a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta) = r \cdot \cos(\theta + \varphi).$$

Démonstration. □

Exercice 9. Résoudre les équations d'inconnu réel θ suivantes :

1. $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ 2. $\sin(2\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\tan(\theta) = -1$ 4. $\cos(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta) = 1$
5. $\cos(\theta)^2 - \cos(\theta) - 1 = 0$ 6. $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

3.3 Résolution d'inéquations trigonométriques

On effectue la résolution d'inéquations trigonométriques à travers des exemples et des exercices.

Exemple 16. Résolution des inéquations d'inconnu réel θ suivantes :

1. $\cos(\theta) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\sin(2\theta) \geqslant \frac{1}{2}$ 3. $\tan(\theta) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 10. Résoudre les inéquations d'inconnu réel θ suivantes :

1. $\cos(\theta) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\sin(\theta) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3. $\tan(\theta) > 1$ 4. $\cos(\theta) - \sin(\theta) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 11. Résoudre les inéquations d'inconnu réel θ en fonction du paramètre réel c suivantes :

1. $\cos(\theta) \leqslant c$ 2. $\sin(\theta) > c$ 3. $\tan(\theta) \geqslant c$.