Nombres complexes

Résumé

On introduit un nouvel ensemble de nombres : les nombres complexes. Cet ensemble est une extension de l'ensemble des nombres réels et un certain nombre de propriétés de $\mathbb{R}$ se généralisent à $\mathbb{C}$. De plus, les interprétations géométriques de $\mathbb{C}$ permettent de ramener l'étude de certains problèmes géométriques à des problèmes de calculs algébriques. Enfin, l'ensemble $\mathbb{C}$ permet la résolution d'un certain nombre d'équations sans solution dans $\mathbb{R}$.

1 Ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C}$

1.1 Définitions et opérations usuelles

Définition 1. (Nombre i, nombre complexe, écriture algébrique)

Il existe un nombre qu'on note i vérifiant $i \cdot i = -1$. On appelle nombre complexe un nombre pouvant s'écrire sous la forme $a + i \cdot b$, où a et b sont des nombres réels. Une telle écriture est appelée écriture algébrique. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Exemple 2. i, $-i$, $2+3i$, $\sqrt{2}$ sont des nombres complexes.

Définition 3. (Partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur)

Soit $z = a + i \cdot b$ un nombre complexe, où a, b sont des réels. Les nombres a et b sont respectivement appelés partie réelle et partie imaginaire de z. Ils sont respectivement notés $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$. On dit que z est un nombre imaginaire pur si sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Remarque 4. Un nombre complexe z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Exemple 5. On a $\mathrm{Re}(i) = 0$ et $\mathrm{Im}(i) = 1$, $\mathrm{Re}(2-3i) = 2$ et $\mathrm{Im}(2-3i) = -3$.

Définition 6. (Somme et produit)

Soient $z_1 = a + i \cdot b$, $z_2 = c + i \cdot d$ des nombres complexes où a, b, c, d sont des nombres réels.

- *La somme de z_1 et de z_2 qu'on note $z_1 + z_2$ désigne le nombre complexe*

$$(a+c) + i \cdot (b+d)$$

- *Le produit de z_1 et de z_2 qu'on note $z_1 \cdot z_2$ désigne le nombre complexe*

$$(a \cdot c - b \cdot d) + i \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$$

Exemple 7. En posant $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = 1 - i$, on obtient $z_1 + z_2 = 4 - 3i$ et $z_1 \cdot z_2 = 1 - 5i$.

Proposition 8. (Unicité de l'écriture algébrique)

Soit z un nombre complexe, soient a, b, c, d des réels vérifiant $z = a + i \cdot b$ et $z = c + i \cdot d$. Alors

$$a = c \text{ et } b = d.$$

Démonstration. □

Définition 9. (Conjugué, module)

Soit $z = a + i \cdot b$ un nombre complexe où a, b sont des réels.

- *Le conjugué de z (noté $\bar{z}$) désigne le nombre complexe : $\bar{z} = a - i \cdot b$.*

- *Le module de z (noté $|z|$) désigne le nombre réel positif :* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque 10. Le module étant la notion de valeur absolue des réels aux nombres complexes.

Exemple 11. Pour $z = 3 + 2 \cdot i$, $\bar{z} = 3 - 2 \cdot i$, $|z| = \sqrt{13}$.

1.2 Propriétés des différentes opérations

Proposition 12. (Propriétés de la somme)

- *Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes. Alors :* $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ *(associativité)*
- *Soient z_1, z_2 des nombres complexes. Alors :* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *(commutativité)*
- *Le nombre 0 vérifie :* $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$ *(0 est élément neutre pour la somme)*
- *Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique complexe w vérifiant $w + z = z + w = 0$. w est appelé opposé de z, il est noté $-z$.*

Démonstration. □

Proposition 13. (Propriétés du produit)

- *Soient z_1, z_2, z_3 des nombres complexes. Alors :* $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$. *(associativité)*
- *Soient z_1, z_2 des complexes. Alors :* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$. *(commutativité)*
- *Le nombre 0 vérifie :* $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$. *(0 est absorbant pour le produit)*
- *Le nombre 1 vérifie :* $\forall z \in \mathbb{C}, z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$. *(1 est élément neutre pour le produit)*
- *Soit z un complexe non nul. Il existe un unique complexe w vérifiant : $z \cdot w = w \cdot z = 1$. w est appelé inverse de z, il est noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}.*
- *Soient z et w des nombres complexes vérifiant : $z \cdot w = 0$. Alors $z = 0$ ou $w = 0$ (intégrité du produit)*

Démonstration. □

Proposition 14. (Règles de calcul usuelles)

- *Soient z_1, z_2, z_3 des complexes. Alors :* $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$. *(distributivité)*
- *Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des complexes. Alors :* $(z_1 + z_2) \cdot (z_3 + z_4) = z_1 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_4$.
- *Soit* $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^\star$. *Alors :* $\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_4} = \frac{z_1 \cdot z_4 + z_2 \cdot z_3}{z_3 \cdot z_4}$.

Démonstration. □

Proposition 15. (Propriétés de la partie réelle, de la partie imaginaire)

- *Soient z et w deux nombres complexes. Alors :*

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$$

- *Soient λ un réel et z un nombre complexe. Alors :*

$$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z).$$

Démonstration. □

Avertissement 16. λ est réel. Dans le cas où λ serait un nombre complexe, il existe des cas où $\mathrm{Re}(\lambda z) \neq \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) \neq \lambda \mathrm{Im}(z)$, par exemple avec $\lambda = z = i$.

Proposition 17. (Propriétés de la conjugaison)

- *Soient z, w des nombres complexes. Alors :* $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$. *(additivité)*
- *Soient z, w des nombres complexes. Alors :* $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$. *(multiplicativité)*
- *Soit z un nombre complexe non nul. Alors :* $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$.
- *Soit z un nombre complexe. Alors :* $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- *Soit z un nombre complexe. Alors :* $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ *et* $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.
- *Soit z un nombre complexe. Alors :* $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ *et* $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Démonstration. □

Proposition 18. (Propriétés du module)

- *Soit z un nombre complexe. Alors :* $|z| \geqslant 0$ *et* $(|z| = 0) \Leftrightarrow (z = 0)$.
- *Soient z, w des nombres complexes. Alors :* $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
- *Soient z, w des nombres complexes. Alors :* $||z| - |w|| \leqslant |z + w|$ *et* $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Démonstration. □

1.3 Méthodes de calcul

Il est important de comprendre qu'on a étendu aux nombres complexes les différentes opérations algébriques valides sur les nombres réels (somme, produit, quotient). Ainsi, on peut faire du calcul littéral avec les nombres complexes sans revenir dans tous les cas à leur écriture algébrique. Aux opérations usuelles, on rajoute une nouvelle opération : la conjugaison. Cette dernière vérifie des propriétés algébriques permettant la simplification d'un certain nombre de calcul. Par contre, on n'a pas défini de relation d'ordre sur les nombres complexes. Ainsi, une inégalité entre réels est à manipuler avec précaution si ces réels sont écrits à l'aide de nombres complexes.

Écrire sous forme algébrique

Écrire un nombre complexe z sous forme algébrique signifie l'écrire sous la forme $a + i \cdot b$ avec a, b réels. Pour mettre sous forme algébrique, on utilise les règles usuels de calcul. Dans le cas où $z = \frac{u}{v}$ avec u, v des nombres complexes, on multiplie au numérateur et au dénominateur par $\bar{v}$. Ainsi, on obtient $z = \frac{u \cdot \bar{v}}{|v|^2}$. Le dénominateur est maintenant réel.

Exemple 19. On pose $z = \frac{3 - i}{2 + i}$. Écrire z sous forme algébrique.

Vérifier le caractère réel ou imaginaire d'un nombre complexe

Pour vérifier si un nombre complexe z est réel, on utilise l'équivalence : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$. De même, pour vérifier si z est un imaginaire pur, on utilise l'équivalence : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$. L'intérêt d'avoir des égalités est qu'on peut les manipuler à l'aide des opérations algébriques usuelles.

Exemple 20. Soit $z = a + i \cdot b$ un nombre complexe avec a, b réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\frac{z + i}{z + 1 + 2 \cdot i}$ soit un nombre réel.

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes

1. $(1 + 2 \cdot i)(3 - i)$ 2. $\frac{2}{1 - 7i} + \frac{3}{i}$ 3. $(1 + i)^3$ 4. $\left(\frac{1 - 2i}{1 + 2i}\right)^2$.

Exercice 2. Soit $z = a + i \cdot b$ un nombre complexe avec a, b réels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b pour que

1. $\mathrm{Re}((z+i)(\overline{2z}+1-i)) = 0$ 2. $\frac{z-1+i}{\overline{z}+2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Résoudre l'équation d'inconnu $z \in \mathbb{C}$: $z \cdot (2\overline{z} + 1 - 3 \cdot i) = 1 + i$.

Exercice 4. Soient u, v des nombres complexes. Montrer les identités suivantes

1. $(u + i \cdot v)(u - i \cdot v) = u^2 + v^2$ 2. $|u+v|^2 - |u-v|^2 = 4 \cdot \mathrm{Re}(u \cdot \overline{v})$.

2 Le plan complexe

2.1 Définitions

Définition 21. (Représentation graphique, affixe)

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan.

- *On appelle représentation graphique du nombre complexe z le point de coordonnées*

$$(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)).$$

- *On appelle affixe du point M de coordonnées (a, b) le nombre complexe $z = a + i \cdot b$. Il peut être noté z_M.*

- *Soient A, B deux points du plan. on appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ le nombre complexe $z_B - z_A$. Il peut être noté $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$.*

Remarque 22. Cette correspondance entre points du plan et nombres complexes est bijective : tout point du plan admet un unique affixe et tout nombre complexe admet une unique représentation graphique. Dans cette représentation, les nombres réels sont représentés par des points de l'axe des abcsisses, les imaginaires purs par des points de l'axe des ordonnées. Le nombre 0 est représenté par l'origine O.

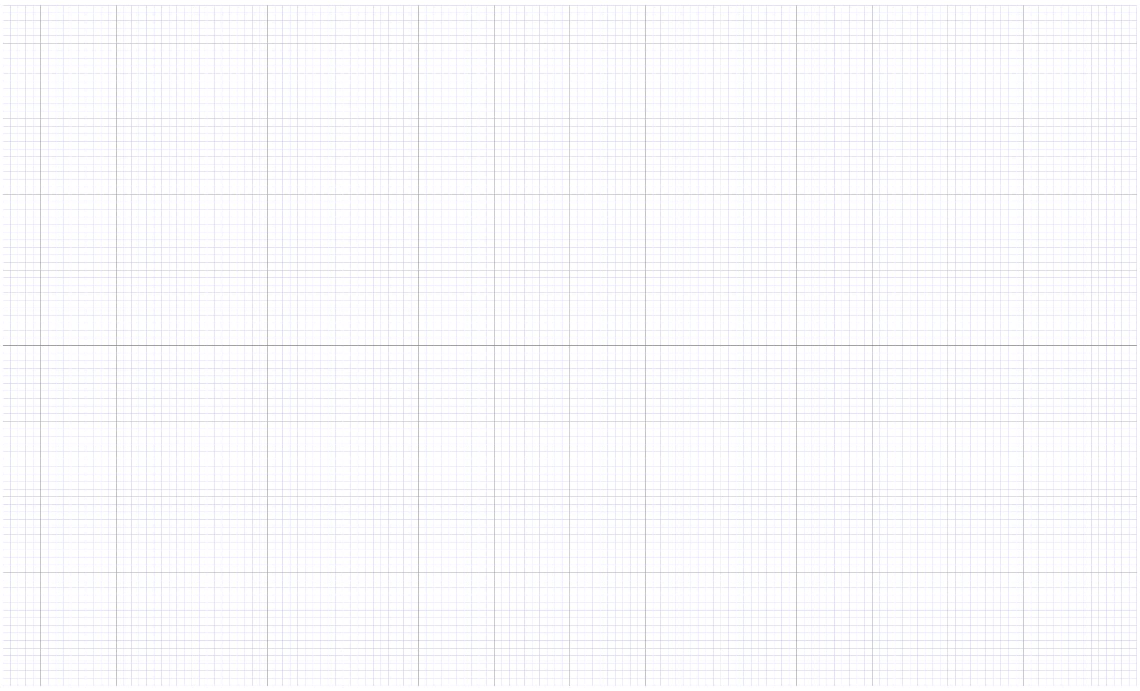

Figure 1.

2.2 Interprétation géométrique des différentes opérations

Dans ce paragraphe, on fixe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan.

Proposition 23. (Interprétation géométrique d'une somme)

Soient a et z deux nombres complexes représentés géométriquement par les points A et M. Le nombre complexe $z + a$ est alors représenté graphiquement par le point N obtenu en appliquant à M la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

Dessin :

Proposition 24. (Interprétation géométrique de la conjugaison)

Soit z un nombre complexe représenté géométriquement par le point M. Le conjugué de z est alors représenté géométriquement par le point N obtenu en appliquant à M la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Dessin :

Proposition 25. (Interprétation géométrique du module)

Soient z, w deux nombres complexes représentés géométriquement et respectivement par les points M et N. Le module de $|w - z|$ est alors égal à $\|\overrightarrow{\mathrm{MN}}\|$. Ainsi, $|w - z|$ est égal à la distance entre les points M et N.

Dessin :

Exercice 5. Donner une interprétation géométrique aux transformations suivantes :

1. $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ 2. $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ 3. $z \mapsto 2 \cdot z$ 4. $z \mapsto -3 \cdot z$ 5. $z \mapsto i \cdot z$.

Exercice 6. Donner une description géométrique des ensembles suivants :

1. $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(2z - i\bar{z} - 2 + i) = 0\}$ 2. $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ 3. $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = \frac{1}{2}\right\}$.

3 Formes trigonométriques et exponentielles

3.1 Définitions

Définition 26. (forme trigonométrique, forme exponentielle, argument)

Soit z un nombre complexe de module 1. Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$z = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta),$$

cette écriture est appelée forme trigonométrique de z. Un tel nombre peut également être noté $e^{i\theta}$. Cette dernière notation est appelée forme exponentielle de z. Un nombre θ correspondant est appelé argument de z.

Démonstration. □

Dessin :

Définition 27.

Soit z un nombre complexe non nul. Il existe alors un $\theta \in \mathbb{R}$ et un unique $r > 0$ vérifiant :

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \;\; et \;\; z = r.e^{i\theta}.$$

La première écriture est appelée forme trigonométrique de z et la seconde forme exponentielle. Un nombre θ correspondant est appelé argument de z.

Démonstration. □

Dessin :

Remarque 28. r est en fait égal au module de z. Il n'y a pas unicité de θ : posons $z = i$. On a :

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right).$$

Pour imposer un unique θ, on doit le choisir dans un intervalle de longueur 2π. Par exemple, dans le calcul précécent, si on veut que θ appartienne à l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'unique possibilité est $\theta = \frac{\pi}{2}$. En pratique, pour avoir un argument « simple », on choisit $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in]-\pi, \pi]$. Lorsque θ appartient à $]-\pi, \pi]$, θ est appelé argument principal de z.

3.2 Propriétés de l'exponentielle complexe

Proposition 29.

- *Soit θ un nombre réel. Alors : $|e^{i\theta}| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$*
- *Soient α, β des réels. Alors : $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$ et $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$*
- *Soient θ un nombre réel et n un entier naturel. Alors : $e^{i \cdot n \cdot \theta} = (e^{i\theta})^n$*
- *Soit θ un nombre réel. Alors : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. (Formules d'Euler)*

Démonstration. □

Exercice 7. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

3.3 Méthodes de calcul

Trouver une forme exponentielle ou trigonométrique

Étant donné un nombre complexe non nul $z = a + i \cdot b$ écrit sous forme algébrique, pour l'obtenir sous forme trigonométrique on peut procéder de la manière suivante :

1. on factorise z par $|z|$. On a alors $z = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.
2. On cherche θ réel vérifiant : $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
3. On a alors $z = \sqrt{a^2+b^2} \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{i\theta}$.

Dans des cas un peu plus compliqués, on pourra utiliser les propriétés de l'exponentielle complexe.

Exercice 8. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $1 + 3 \cdot i$ 2. $2 - 2 \cdot i$ 3. $(1 - 3 \cdot i)^7$ 4. $(1+i)^4 \cdot (3-i)^{13}$.

Linéariser un polynôme trigonométrique

Étant donné une expression sous la forme $\cos(\theta)^p \sin(\theta)^q$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, linéariser consiste à la réécrire sous la forme $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$ où les a_k, b_k sont des réels. Une telle écriture peut être utile par exemple lorsqu'on veut calculer des primitives. Pour l'obtenir, on peut procéder de la manière suivante :

1. on remplace $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ respectivement par $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$ et $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

2. On développe « joyeusement ».

3. On regroupe par termes ayant des arguments opposés : cela fait apparaître des $\cos(k\theta)$ et des $\sin(k\theta)$.

Exemple 30. Linéariser $\cos(\theta)^3$.

Exercice 9. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\sin(\theta)^3$ 2. $\cos(2\theta)\sin(3\theta)$ 3. $\cos(\theta)\cos(2\theta)$

Exercice 10. Trouver des réels a, b vérifiant : $\forall\theta\in\mathbb{R}, \sin(3\theta) = a\cdot\sin(\theta)^3 + b\cdot(\sin(\theta))$.

Indication : $\sin(3\theta) = \mathrm{Im}(e^{3i\theta}) = \mathrm{Im}((\cos(\theta)+i\cdot\sin(\theta))^3) = \cdots$

Retrouver des formules de trigonométrie

Grâce aux propriétés de l'exponentielle complexe et des opérations algébriques, il est possible de retrouver un certain nombre d'identités trigonométrique. On met en lumière l'une d'entre elle basée sur une méthode appelée « factorisation par l'angle moitié ». On considère une expression de la forme :

$$z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}.$$

1. On factorise par $e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$. On a alors $z = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right)$.

2. à l'aide des formules d'Euler, on obtient : $z = 2e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

3. En considérant les parties réelles et imaginaires à gauche et à droite de l'égalité, on retrouve :

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \text{ et } \sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Exercice 11. À l'aide d'une factorisation par l'angle moitié, donner une forme exponentielle de $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{24}\right)$. Indication : on pourra calculer le module à l'aide de la forme algébrique.

Exercice 12. On aimerait démontrer à l'aide des nombres complexes qu'une expression sous la forme

$$a\cdot\cos(\theta) + b\cdot\sin(\theta)$$

peut s'écrire sous la forme $r\cdot\cos(\theta+\varphi)$.

1. Montrer que $a\cdot\cos(\theta)+b\cdot\sin(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}\cdot(a-i\cdot b))$.
2. En déduire le résultat demandé.

4 Résolution d'équations du second degré

4.1 Équations du second degré à coefficients réels

Définition 31. (Équation du second degré à coefficients réels, discriminant)

- *Une équation du second degré d'inconnu complexe z est une équation de la forme*

$$a\cdot z^2 + b\cdot z + c = 0, \tag{1}$$

où a, b, c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

- *On appelle discriminant de l'équation qu'on note Δ le nombre réel $b^2 - 4\cdot a\cdot c$.*

Proposition 32. (Solutions d'une équation du second degré à coefficients réels)

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnu complexe $z\in\mathbb{C}$

$$a\cdot z^2+b\cdot z+c=0,$$

on note Δ son discriminant.

- *Cas 1 : $\Delta>0$. L'équation admet alors exactement deux solutions qui sont réelles:*

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\quad et\quad z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}.$$

- *Cas 2 : Δ=0. L'équation admet une unique solution double qui est réelle :*

$$z_1=z_2=\frac{-b}{2\cdot a}.$$

- *Cas 3 : $\Delta<0$. L'équation admet alors exactement deux solutions qui sont conjuguées l'une de l'autre :*

$$z_1=\frac{-b+i\cdot\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}\quad et\quad z_2=\frac{-b-i\cdot\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}.$$

De plus, z_1 et z_2 vérifient $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1\cdot z_2=\frac{c}{a}$.

Démonstration. □

Remarque 33. L'écriture de $(a\cdot z^2+b\cdot z+c)$ sous la forme $a\cdot\left(\left(z+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\cdot a^2}\right)$ est appelée forme canonique. Cette manière d'écrire peut être utile pour montrer qu'un polynôme du second degré est positif.

Exercice 13. Résoudre les équations et mettre les solutions sous forme exponentielle.

1. $z^2+z+1=0$ 2. $z^2-8\cdot z+15=0$ 3. $z^2-z+\frac{1}{4}=0$.

Exercice 14. Soient deux nombres dont la somme est égale à 2 et le produit est égal à 5. Trouver ces deux nombres.

Exercice 15. Montrer que pour tout x,y réels on a : $x^2+y^2-x\cdot y\geqslant 0$.

4.2 Équations du type $z^2=w$

Soit w un nombre complexe non nul donné. On considère l'équation d'inconnu complexe z :

$$z^2=w.$$

Pour résoudre ce type d'équation, on peut procéder (au moins) de deux manières différentes.

Méthode 1 : mettre w sous forme exponentielle.

On a alors $w=r\cdot e^{i\theta}$, avec $r>0$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$ par exemple. Donc

$$\begin{aligned}z^2=w &\Leftrightarrow z^2=r\cdot e^{i\theta}\\ &\Leftrightarrow z^2=\left(\sqrt{r}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2\\ &\Leftrightarrow z^2-\left(\sqrt{r}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2=0\\ &\Leftrightarrow \left(z-\sqrt{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\theta}{2}}\right)\left(z+\sqrt{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\theta}{2}}\right)=0\end{aligned}$$

Par intégrité du produit dans $\mathbb{C}$, on en déduit que

$$z^2=w\Leftrightarrow z=\sqrt{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\theta}{2}}\ \text{ou}\ z=-\sqrt{r}\cdot e^{i\cdot\frac{\theta}{2}}.$$

On peut alors trouver aisément une forme exponentielle des solutions de l'équation. Un problème qui pourrait arriver est qu'un argument de w n'ait pas une expression simple.

Méthode 2 : écrire z et w sous forme algébrique

En posant $a+i\cdot b=z$ et $u+i\cdot v=w$, avec a, b, u, v des réels. On a

$$\begin{aligned} z^2=w &\Leftrightarrow (a+i\cdot b)^2=u+i\cdot v \\ &\Leftrightarrow (a^2-b^2)+i\cdot 2a\cdot b=u+i\cdot v \end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit que

$$z^2=w \Leftrightarrow (a^2-b^2)=u \text{ et } 2a\cdot b=v.$$

De plus, si $z^2=w$, nécessairement $|z|^2=|w|=\sqrt{u^2+v^2}$. On en déduit que

$$z^2=w \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= u \\ 2a\cdot b &= v \\ a^2+b^2 &= \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$$

Après différents calculs (à détailler en pratique), on obtient

$$z^2=w \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= \frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2} \\ 2a\cdot b &= v \\ b^2 &= \frac{-u+\sqrt{u^2+v^2}}{2} \end{cases}$$

Reste à choisir a et b de sorte que toutes les conditions soient vérifiées.

Exercice 16. On considère l'équation d'inconnu complexe z : $z^2=1+i$.

1. Déterminer les solutions de cette équation sous forme exponentielle.
2. Déterminer les solutions de cette équations sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.