Somme et produit

Résumé

On introduit des notations permettant de manipuler rigoureusement des sommes et des produits ayant un nombre arbitraire de termes. Un certain nombre de formules remarquables sont également énoncées. Ces dernières auront l'occasion d'apparaître régulièrement tout au long de l'année.

1 Somme

1.1 Définitions

Notation 1. (Symbole $\sum$)

Soit I un ensemble fini, soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. La notation

$$\sum_{i\in I} a_i$$

désigne le nombre obtenu en ajoutant tous les a_i lorsque i parcourt l'ensemble I. Le symbole $\sum$ est appelé symbole « somme ». Par convention, $\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$.

Exemple 2. Pour $I=\{1,3,6,7\}$ et $a_1=1, a_3=-5, a_6=2, a_7=9$, on a

$$\sum_{i\in I} a_i = 1+(-5)+2+9=7.$$

Notation 3. (Intervalle d'entiers)

Soient n,m deux entiers.L'ensemble $\{i\in\mathbb{Z}, n\leqslant i\leqslant m\}$ est noté $[\![n,m]\!]$ ou $\{n,n+1,\cdots,m\}$. Dans le cas où $n>m$, l'ensemble $[\![n,m]\!]$ est égal à $\emptyset$.

Exemple 4. On a $[\![-3,7]\!]=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$

Notation 5. (Variantes d'écriture)

Soit I un ensemble fini, soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

- *Si $I=[\![n,m]\!]$ est un intervalle d'entiers, $\sum\limits_{i\in I} a_i$ peut s'écrire $\sum\limits_{i=n}^{m} a_i$*
- *Si $I=\{(k,\ell)/n\leqslant k\leqslant \ell\leqslant m\}$ avec n et m entiers, $\sum\limits_{i\in I} a_i$ peut s'écrire $\sum\limits_{n\leqslant k\leqslant \ell\leqslant m} a_{k,\ell}$.*
- *Si $I=[\![n,m]\!]^2$ avec n et m entiers, $\sum\limits_{i\in I} a_i$ peut s'écrire $\sum\limits_{n\leqslant k,\ell\leqslant m} a_{k,\ell}$*
- *Si $I=[\![n,m]\!]\times[\![p,q]\!]$, avec n,m,p,q entiers, $\sum\limits_{i\in I} a_i$ peut s'écrire $\sum\limits_{\substack{n\leqslant k\leqslant m\\ p\leqslant \ell\leqslant q}} a_{k,\ell}$*

Exemple 6. On a :

$$\sum_{i\in[\![1,15]\!]} 3\cdot i = \sum_{i=1}^{15} 3\cdot i$$

1.2 Propriétés et formules

Proposition 7. (Linéarité)

Soient I un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres complexes, $\lambda\in\mathbb{C}$. Alors :

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\left(\sum_{i\in I}a_i\right)+\left(\sum_{i\in I}b_i\right)\ \text{ et }\ \sum_{i\in I}\lambda\cdot a_i=\lambda\left(\sum_{i\in I}a_i\right).$$

Proposition 8. (Séparation, fusion)

Soient I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

- *Si $J\subset I$, alors*

$$\sum_{i\in I}a_i=\left(\sum_{i\in J}a_i\right)+\left(\sum_{i\in I\setminus J}a_i\right)\ \text{ et }\ \sum_{i\in J}a_i=\left(\sum_{i\in I}a_i\right)-\left(\sum_{i\in I\setminus J}a_i\right).$$

- *Si K et L sont deux sous-ensembles de I, alors :*

$$\left(\sum_{k\in K}a_k\right)+\left(\sum_{\ell\in L}a_\ell\right)=\left(\sum_{i\in K\cup L}a_i\right)-\left(\sum_{j\in K\cap L}a_j\right)$$

  Dans le cas où $K\cap L=\emptyset$, on a alors :

$$\left(\sum_{k\in K}a_k\right)+\left(\sum_{\ell\in L}a_\ell\right)=\left(\sum_{i\in K\cup L}a_i\right)$$

Proposition 9. (Formules usuelles)

- *Soient n,m deux entiers vérifiant $n\leqslant m$. Alors :* $\sum\limits_{n\leqslant i\leqslant m}1=(m-n+1)$.
- *Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors :* $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}k=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.
- *Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors :* $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}k^2=\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- *Soient n,m deux entiers vérifiant $n\leqslant m$ et q un nombre complexe différent de 1. Alors*

$$\sum_{k=n}^{m}q^k=\frac{q^n-q^{m+1}}{1-q}=\frac{q^{m+1}-q^n}{q-1}.$$

Démonstration. □

Exercice 1. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant 49}1$ 2. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant 99}i$ 3. $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant 100}i^2$ 4. $\sum\limits_{5\leqslant i\leqslant 45}4^i$.

Exercice 2. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{20\leqslant k\leqslant 50}(k^2-3\cdot k+1)$ 2. $\sum\limits_{10\leqslant k\leqslant 25}k\cdot(25-k)$.

1.3 Méthodes de calcul

Effectuer un changement d'indice

Il existe un grand nombre de changement d'indice. Ils permettent en général de simplifier les calculs. On présente les plus courants.

Proposition 10. (Changement d'indice : translation)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}.$$

Démonstration. □

Remarque 11. Il est possible d'effectuer des translations avec des valeurs différentes de 1 et -1. Dans ce cas, les bornes sont à adapter.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{n\leqslant k\leqslant 2n} k$.

1. À l'aide du changement de variable $\ell = k - n$, calculer S_n.
2. En remarquant que $S_n = \left(\sum_{0\leqslant k\leqslant 2n} k\right) - \left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} k\right)$, calculer S_n.

Proposition 12. (Changement d'indice : symétrie)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}.$$

Démonstration. □

Remarque 13. Il est possible d'effectuer des symétries où les bornes ne sont pas 0 et n. Dans ce cas, les bornes sont à adapter.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k$.

1. Montrer que $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (n-k)$. 2. En déduire que : $2 \cdot S_n = n(n+1)$. 3. Retrouver la valeur de S_n.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{-n\leqslant k\leqslant n} \sin(k)$ 2. $T_n = \sum_{-45<k\leqslant n} k^2$ 3. $U_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \,\text{pair}}} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$. On pourra poser $\ell = \frac{k}{2}$.

Reconnaître une somme télescopique

Définition 14. (Somme télescopique)

On appelle somme télescopique une somme s'écrivant sous la forme :

$$\sum (a_i - a_{i-1}) \quad \text{ou} \quad \sum (a_i - a_{i+1}).$$

où (a_i) est une famille de nombres complexes.

Proposition 15. (Simplification par télescopage)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

Démonstration. □

Remarque 16. Il existe des variantes en modifiant les bornes, ou en modifiant l'indexation pour les termes de la somme. L'important est qu'on fait apparaître la différence de termes dont le décalage d'indice est de 1.

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. On cherche à retrouver le résultat pour $\sum q^k$. On pose $S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} q^k$.

1. En reconnaissant une somme télescopique, simplifier $(1-q) \cdot S_n$.
2. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut calculer : $S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$.
2. En déduire S_n.

Calculer des sommes « doubles »

Les sommes doubles considérées sont en général de la forme

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}.$$

En réalité, on ne sait pas calculer directement une somme double. En pratique, on effectue le calcul de deux sommes simples successives.

Proposition 17. (Somme sur un « rectangle »)

Soient n, m deux entiers naturels et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ une famille de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right).$$

Proposition 18. (Somme sur un « triangle »)

Soient n un entier naturel et $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right).$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$ 2. $T_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} j$ 3. $U_n = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} i$ 4. $V_n = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (j - i)$.

Exercice 9. Soient n, m deux entiers naturels, soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ deux familles de nombres complexes. Montrer que

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_i b_j = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} b_j \right).$$

2 Produit, factorielle et coefficients binomiaux

2.1 Définitions

Notation 19. (Symbole $\prod$)

Soit I un ensemble fini, soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes. La notation

$$\prod_{i \in I} a_i$$

désigne le nombre obtenu en multipliant tous les a_i lorsque i parcourt l'ensemble I. Le symbole $\prod$ est appelé symbole « produit ». Par convention, $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$.

Remarque 20. Les variantes d'écriture qu'on a pour $\sum$ peuvent également être utilisées pour $\prod$.

Exemple 21. Pour $I = \{1, 2, 3\}$ et $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 4$, on a

$$\prod_{i=1}^{3} a_i = 40.$$

Définition 22. (Factorielle)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n qu'on note $n!$, le nombre défini par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k (= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n).$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple 23. On a : $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$.

Définition 24. (Coefficient binomial)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Le coefficient binomial k parmi n qu'on note $\binom{n}{k}$, est le nombre défini par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \text{ ou } k > n, \\ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 25. Le terme « k parmi n » prendra son sens lorsqu'on abordera le chapitre du dénombrement.

Exemple 26. On a $\binom{4}{-1}=0, \binom{12}{14}=0, \binom{7}{3}=35$.

2.2 Propriétés et formules

Proposition 27. (Multiplicativité du produit)

Soient I un ensemble fini, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres complexes. Alors :

$$\prod_{i\in I}(a_i\cdot b_i)=\left(\prod_{i\in I}a_i\right)\cdot\left(\prod_{i\in I}b_i\right).$$

Proposition 28. (Formules usuelles)

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{Z}$. Alors :

- $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ *(symétrie des coefficients binomiaux)*
- $k\cdot\binom{n+1}{k}=(n+1)\cdot\binom{n}{k-1}$ *(formule du pion)*
- $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ *(triangle de Pascal).*

Démonstration. □

Remarque 29. Ces formules ont leurs variantes en effectuant différents changements de variables et en manipulant les égalités. Par exemple, lorsque les expressions sont bien définies on a également

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

Proposition 30. (Formule du binôme)

Soient $n\in\mathbb{N}$, a et b des nombres complexes. Alors :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

Démonstration. □

Remarque 31. Du fait de la symétrie des coefficients binomiaux et de la commutativité du produit et de la somme, cette formule admet également des variantes d'écritures par exemple

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

2.3 Méthodes de calcul

Simplifier des produits

Simplifier un produit consiste en général à écrire le produit à l'aide de produits ou quotients de nombres connus : des facteurs en n^k, des facteurs en q^n, des facteurs en $n!$ ou des coefficients binomiaux. On dispose essentiellement de trois méthodes :

- utiliser la multiplicativité du produit,
- « compléter un produit » pour faire apparaître des factorielles,
- reconnaître un « produit télescopique ».

Remarque 32. Attention, le produit n'est pas linéaire : $\prod_{i=1}^{5} 2 \neq 2 \cdot \prod_{i=1}^{5} 1$. En effet, le premier produit donne 2^5 et le second donne 2.

Exemple 33. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Montrons que

$$\frac{\prod\limits_{0 \leqslant i \leqslant k-1} (n-i)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$A_n = \prod_{i=1}^{n} (2 \cdot i) \text{ et } B_n = \prod_{i=0}^{n} (2 \cdot i + 1)$$

1. Écrire A_n à l'aide d'une puissance de 2 et d'une factorielle.
2. Écrire B_n à l'aide d'une puissance de 2 et de factorielles.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier $\prod\limits_{n \leqslant k \leqslant 2 \cdot n} \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right)$.

Calculer rapidement des coefficients binomiaux

La formule du triangle de Pascal nous fournit une méthode pour calculer rapidement une ligne de coefficients binomiaux. Obtenir une telle ligne peut être pratique si on veut développer une expression du type $(a+b)^n$.

Donnons le début du triangle :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Remarquons que la première colonne est constituée de 1 et que les cases non remplies sont égales à 0. Pour calculer un nouveau coefficient, on utilise la relation $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$. Ceci se traduit par le fait que pour calculer $\binom{n}{k}$, on effectue la somme du coefficient juste au dessus avec celui qui le précède. Par exemple, pour calculer $\binom{5}{2}$ on a effectué $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$, c'est-à-dire 4+6=10. De la même façon, on peut remarquer que $\binom{6}{3} = 10 + 10 = 20$.

En utilisant la ligne correspondant à $n = 3$, on trouve que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.$$

Exercice 12. Calculer $\binom{6}{k}$ et $\binom{7}{k}$ pour $k \in [\![0, 7]\!]$.

Exercice 13. Soient a, b des nombres complexes. Développer $(a+b)^5$.

Reconnaître un binôme

Une formule se lit dans les deux sens : la formule du binôme nous permet de développer $(a+b)^n$, mais elle permet également de factoriser certaines combinaisons linéaires de coefficients binomiaux.

Pour reconnaître une formule du binôme dans le cas où on ne voit pas de termes de la forme q^k, il s'agit en fait de 1^k.

Exemple 34. On a :

$$\sum_{k=0}^{49} \binom{49}{k} = \sum_{k=0}^{49} \binom{49}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^{49} = 2^{49}.$$

Parfois, on ne peut pas appliquer directement la formule du binôme. Dans ce cas, il faut en général manipuler les coefficients binomiaux à l'aide des différentes formules (symétrie, formule du pion, formule du triangle de Pascal).

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{n-k}(-1)^k$ 2. $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k\binom{n}{k}$ 3. $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta).$$

En remarquant que $\cos(k\theta) = \mathrm{Re}(e^{i \cdot k\theta})$, factoriser S_n.

3 Exercices

Exercice 16. (Un classique de taupe). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit θ un réel vérifiant $\cos(\theta) \neq 1$. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta), T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) \text{ et } U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i \cdot k\theta}.$$

1. Montrer que : $S_n = \mathrm{Re}(U_n)$ et $T_n = \mathrm{Im}(U_n)$.
2. En reconnaissant une formule et en factorisant par les angles moitiés correspondants, montrer que

$$U_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i \cdot \frac{n\theta}{2}}$$

3. En déduire S_n et T_n comme des produits et quotients de fonctions trigonométriques.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant n}} \min(k, \ell), T_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}.$$

Exercice 18. Soient p, n des entiers naturels non nuls. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}$$

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{p+k}{k} = \binom{p+k+1}{k} - \binom{p+k}{k-1}$.
2. En déduire une simplification de $S_{n,p}$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire $(1+\sqrt{2})^n$ sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont des entiers écrits sous forme d'une somme.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 1$.