Suites usuelles

Résumé

On rappelle différentes définitions autour des suites. On étudie plus précisément les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et les suites récurrentes linéraires d'ordre 2.

1 Généralités

1.1 Majorée, minorée, bornée

Définition 1. (Majorée, minorée, bornée)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. On dit que :*

- (u_n) *est majorée si :* $\exists M \in \mathbb{R}(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M)$
- (u_n) *est minorée si :* $\exists m \in \mathbb{R}(\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n)$
- (u_n) *est bornée si :* $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2(\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M)$

Remarque 2. Cela signifie que la partie $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majorée (resp. minorée, bornée), et un réel M correspondant est un majorant de (u_n). On dit également que (u_n) est majorée par M. Lors de l'étude de suite, il est important de préciser un majorant si on vous demande de montrer qu'une suite est majorée (à adapter pour « minorée » et « bornée »).

Proposition 3. (Caractérisation d'une suite bornée)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. (u_n) *est une suite bornée*
2. $(|u_n|)$ *est une suite majorée.*

Démonstration. □

Remarque 4. En général, il est plus facile de démontrer la deuxième proposition : la valeur absolue étant positive, les inégalités se manipulent plus aisément.

Exercice 1. Parmis les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-2)^n, v_n = \cos(n), w_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \cdot 2^n$$

préciser si elles sont majorées, minorées. Dans le cas où elles le sont, donner un majorant, un minorant.

1.2 Monotonie

Définition 5. (Croissante, décroissante, monotone)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels. On dit que :*

- (u_n) *est croissante si :* $\forall n\in\mathbb{N}(u_n\leqslant u_{n+1})$
- (u_n) *est strictement croissante si :* $\forall n\in\mathbb{N}(u_n<u_{n+1})$
- (u_n) *est décroissante si :* $\forall n\in\mathbb{N}(u_n\geqslant u_{n+1})$
- (u_n) *est strictement décroissante si :* $\forall n\in\mathbb{N}(u_n>u_{n+1})$
- (u_n) *est monotone si* (u_n) *est croissante ou décroissante*
- (u_n) *est strictement monotone si* (u_n) *est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exercice 2. Parmi les suites (u_n), (v_n),(w_n) définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{1}{n^2+1}, v_n=\frac{(-1)^n}{n+1}, w_n=\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

préciser si elles sont monotones ou non. Dans le cas où elles sont monotones, préciser leur monotonie.

2 Suites usuelles définies par une récurrence d'ordre 1

2.1 Suites arithmétiques

Définition 6. (Suite arithmétique)

Soit $r\in\mathbb{R}$. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique de raison* r *si*

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+r$$

Proposition 7. (Formule pour le terme général)

Soient $r\in\mathbb{R}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de raison* r. *Alors :*

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0+n\cdot r$$

Démonstration. $\square$

Proposition 8. (Formule pour une somme de termes consécutifs)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique, et soient* n, N *deux entiers vérifiant* $0\leqslant n\leqslant N$. *Alors :*

$$\sum_{k=n}^{N} u_k=\frac{u_n+u_N}{2}\cdot(N-n+1)$$

Démonstration. $\square$

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de u_n en fonction de n.

2. Calculer $\sum_{40 \leqslant k \leqslant 90} u_k$.

2.2 Suites géométriques

Définition 9. (Suite géométrique)

Soit $q \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \cdot u_n.$$

Proposition 10. (Formule pour le terme général)

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \cdot q^n$$

Démonstration. $\square$

Proposition 11. (Formule pour une somme de termes consécutifs)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et soient n, N deux entiers vérifiant $0 \leqslant n \leqslant N$. Alors :

$$\sum_{k=n}^{N} u_k = \frac{u_n - u_{N+1}}{1 - q}$$

Démonstration. $\square$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de u_n en fonction de n.

2. Calculer $\sum_{1 \leqslant k \leqslant 49} u_k$.

2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 12. (Suite arithmético-géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels q et r vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \cdot u_n + r$$

Remarque 13. Constatons qu'elles généralisent les suites arithmétiques et géométriques : pour $q = 1$, on retrouve la définition d'une suite arithmétique et pour $r = 0$, on retrouve la définition d'une suite géométrique. La formule du terme général n'est pas au programme. Ainsi, il faudra appliquer la méthode qui suit à chaque fois.

Méthode : trouver une formule pour le terme général

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des réels $q\neq 1$ et r vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=q\cdot u_n+r$$

1. On commence par trouver $\alpha\in\mathbb{R}$ vérifiant $\alpha=q\cdot\alpha+r$
2. On définit (v_n) par : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_n-\alpha$. On remarque que (v_n) est une suite géométrique de raison q.
3. Comme $u_n=v_n+\alpha$, on en déduit une formule de v_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=5$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=3\cdot u_n-2$.

1. Donner une formule pour le terme général u_n en fonction de u_n.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier $\sum_{n\leqslant k\leqslant 2\cdot n} u_k$.

3 Suites usuelles définies par une récurrence d'ordre 2

3.1 Définitions

Définition 14. (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre deux s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=a\cdot u_{n+1}+b\cdot u_n.$$

Exemple 15. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1, u_1=5$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=3\cdot u_{n+1}-5\cdot u_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Définition 16. (Équation caractéristique)

Soient a,b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=a\cdot u_{n+1}+b\cdot u_n.$$

L'équation d'inconnu $r\in\mathbb{C}$: $(r^2-a\cdot r-b=0)$ est appelée équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 17. Dans l'exemple 15, la suite (u_n) admet comme équation caractéristique

$$r^2-3r+5=0.$$

3.2 Méthode de calcul

Théorème 18. (Forme du terme général)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - a\cdot r - b = 0 \tag{1}$$

avec $(a,b)\neq(0,0)$. On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique (1).

- *Cas 1 : $\Delta>0$. On note q_1 et q_2 les solutions réelles de (1). Il existe alors $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que*

  $$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = A\cdot(q_1)^n + B\cdot(q_2)^n.$$

- *Cas 2 : $\Delta=0$. On note q la solution double de (1). Il existe alors $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que*

  $$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = (A+B\cdot n)\cdot q^n$$

- *Cas 3 : $\Delta<0$. On note z_0 une des solutions complexes de (1). Il existe alors $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que*

  $$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = A\cdot\mathrm{Re}((z_0)^n) + B\cdot\mathrm{Im}((z_0)^n).$$

  En écrivant $z_0 = R\cdot e^{i\theta}$ sous forme exponentielle, on a alors

  $$\forall n\in\mathbb{N}, u_n = R^n\cdot(A\cdot\cos(n\theta) + B\cdot\sin(n\cdot\theta)).$$

Démonstration. □

Méthode : trouver une formule pour le terme général u_n
Soient a,b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = a\cdot u_{n+1} + b\cdot u_n$. Pour trouver une expression de u_n en fonction de n, on peut procéder de la manière suivante :

1. Résoudre l'équation caractéritique correspondante $r^2 - a\cdot r - b = 0$.
2. Suivant la valeur du discriminant Δ, on obtient la forme de u_n.
3. Pour trouver les valeurs de A et B, on utilise les conditions initiales u_0 et u_1. Cela fournit un système à deux équations et à deux inconnus. On peut alors calculer A et B.
4. Après ces différents calculs, on trouve une expression de u_n en fonction de n.

Exemple 19. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3, u_1 = 5 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = 6\cdot u_{n+1} - 9\cdot u_n$$

1. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Calculer $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 6. On considère les suites $(u_n),(v_n),(w_n)$ définies par

$$\begin{array}{lll} u_0=1, & u_1=2, & \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \\ v_0=-1 & v_1=\frac{1}{2} & \forall n\in\mathbb{N}, v_{n+2}=v_{n+1}-\frac{1}{4}v_n \\ w_0=2 & w_1=-1 & \forall n\in\mathbb{N}, w_{n+2}=2w_{n+1}-4w_n. \end{array}$$

Donner une expression de u_n, v_n, w_n en fonction de n.