Applications

Résumé

Si les ensembles sont des objets mathématiques construits à partir de la notion de « collection d'éléments », les applications sont des objets encodant les notions de « correspondance, association ou transformation ». Bien que de nature assez abstraite, un grand nombre de situations courantes peuvent se traduire dans le langage des applications.

Dans la suite, on introduit le vocabulaire usuel des applications accompagné d'un certain nombre d'exemples illustrant ces nouvelles notions, qui se se retrouveront tout au long de l'année.

1 Généralités

1.1 Définitions et exemples

Définition 1. (Application, ensemble de départ ou d'arrivée, graphe)

Soient E,F des ensembles. Une application de E vers F qu'on note $f\colon E\to F$, est un objet qui consiste à associer tout élément x de E un unique élément de F qui est noté $f(x)$. E est appelé ensemble de départ, F est appelé ensemble d'arrivée, et $\{(x,f(x)), x\in E\}$ est appelé graphe de f. L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Dessin :

Exemple 2.

- cos et sin sont des applications ayant comme ensemble de départ et d'arivée $\mathbb{R}$.
- La notion de plaque d'immatriculation correspond à une application qui associe à une voiture, un numéro.
- La cinématique d'un objet peut être vue comme une application qui associe à un temps, la position de l'objet.
- La conjugaison complexe est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 3. (Fonction, domaine de définition)

Soient E, F des ensembles. Une fonction de E vers F qu'on note $f\colon E\to F$ est un objet associant à tout élément x de E au plus un élément de F qui est noté $f(x)$. L'ensemble des éléments de E ayant une valeur par f est appelé domaine de définition de f. Il est noté $\mathcal{D}_f$.

Remarque 4. Contrairement à une application, pour une fonction certaines valeurs de l'ensemble de départ peuvent ne pas avoir d'image. Par exemple tan: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, est une fonction d'une variable réelle mais n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. On a en fait $\mathcal{D}_f=\{x\in E\,|\,f(x)\text{ existe}\}$. Dans la suite, on s'intéresse essentiellement aux applications, même si la plupart des notions peuvent s'étendre aux fonctions.

Définition 5. (Suite, fonction indicatrice, fonction identité)

Soit E un ensemble.

- *On appelle suite à valeurs dans E une application $u\colon \mathbb{N} \to E$. Une suite est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). L'élément u_n est appelé terme d'indice n (ou de rang n).*

- *Soit A une partie de E. On appelle fonction indicatrice (ou caractéristique) de A l'application notée X_A définie par*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{X}_A\colon & E & \to & F \\ & e & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si}\, e \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

- *On appelle identité de E qu'on note Id_E, l'application définie par*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Id}_E\colon & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Exemple 6. La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles. On sait que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. On a $\mathrm{X}_{\mathbb{N}}(\sqrt{3}) = 0$ et $\mathrm{X}_{\mathbb{N}}(0) = 1$.

Exercice 1. On considère

1. $\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$
2. $\begin{array}{rccl} g\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1-x^2} \end{array}$
3. $\begin{array}{rccl} h\colon & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \ln(x^2+y^2-1) \end{array}$

Préciser si ces fonctions sont des applications ou non. Dans le cas où on n'a pas une application, déteminer le domaine de définition.

1.2 Image et antécédent

Définition 7. (Image, antécédent)

Soit $f\colon E \to F$ une application.

- *Soit $x \in E$. On appelle image de x par f l'élément $f(x)$.*

- *Soit $y \in F$. On appelle antécédent de y par f un élément x vérifiant $f(x) = y$.*

Remarque 8. Tout élément a exactement une image par f. Par contre, il est possible qu'un élément de F ait plusieurs antécédents. Il est également possible qu'il n'ait pas d'antécédent. Par exemple : $\pi, 3\pi$ sont des antécédents de -1 par cos. -54 n'a pas d'antécédent par la fonction cos.

Définition 9. (Image directe d'une partie, image réciproque)

Soit $f\colon E \to F$ une application.

- *Soit A une partie E. L'image directe de A par f qu'on note $f(A)$ désigne l'ensemble*

$$\{f(x), x \in A\}.$$

- *Par abus de langage, l'image de f qu'on note $\mathrm{Im}(f)$ désigne l'ensemble $f(E)$.*

- *Soit B une partie de F. L'image réciproque de B par f qu'on note $f^{-}(B)$ désigne l'ensemble*

$$\{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Remarque 10. L'ensemble $f(A)$ est donc l'ensemble des images des éléments de A. L'ensemble $f^{-}(B)$ est donc l'ensemble des antécédents des éléments de B.

Exercice 2. On définit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3 \cdot x + 1$.

1. Expliciter $f([-1,2])$ à l'aide d'un intervalle.
2. Expliciter $f^{-}([-1,2])$.

1.3 Opérations

Définition 11. (Égalité)

Soient $f: E \to F$ et $g: E \to F$ deux applications. On dit que f et g sont égales si

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

Exemple 12. On définit $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = \sum_{k=1}^{n} k \text{ et } v(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les deux applications u et v sont égales.

Définition 13. (Composition)

Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications. La composée de f par g qu'on note $g \circ f$ désigne l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & E & \to & G \\ & x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Exemple 14. On pose définit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = \sin(x)$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = \sin(x^2)$ et $(f \circ g)(x) = \sin(x)^2$.

Proposition 15. (Associativité)

Soient $f: E \to F$, $g: F \to G$, $h: G \to H$ des applications. Alors :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Proposition 16. (Identité et composition)

Soit $f: E \to F$ une application. Alors : $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Exercice 3. Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2 \cdot x + 1 \end{array}$$

1. Expliciter $\cos \circ f$ et $f \circ \cos$.
2. Déterminer les antécédents de 0 par $\cos \circ f$.
3. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par $f \circ \cos$.

2 Injection, surjection, bijection, application réciproque

2.1 Définitions

Définition 17. (Injection)

Soit $f: E \rightarrow F$ *une application. On dit que* f *est une injection de* E *dans* F *(ou que* f *est injective) si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y)).$$

ou de manière équivalente : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)$.

Remarque 18. Cela signifie que des éléments différents ont des images différentes par f. Autrment dit, que tout élément de F a au plus un antécédent par f.

Exemple 19. La fonction $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, la fonction $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective.

Définition 20. (Surjection)

Soit $f: E \rightarrow F$ *une application. On dit que* f *est une surjection de* E *dans* F *(ou que* f *est surjective) si :*

$$\forall y \in F (\exists x \in E, f(x) = y).$$

Remarque 21. Cela signifie que tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent par f.

Exemple 22. La fonction $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.

Définition 23. (Bijection)

Soit $f: E \rightarrow F$ *une application. On dit que* f *est une bijection de* E *dans* F *(ou que* f *est bijective) si :*

$$\forall y \in F (\exists! x \in E, f(x) = y)$$

Autrement dit, f *est bijective si* f *est injective et surjective.*

Remarque 24. Cela signifie que tout élément de F admet un unique antécédent par f.

Exemple 25. La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 26. (Application réciproque)

Soient $f: E \rightarrow F$ *et* $g: F \rightarrow E$ *des applications. On dit* g *est une application réciproque de* f *si :*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad et \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

Elle est notée f^{-1}.

Exemple 27. $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ et $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont des applications réciproques l'une de l'autre.

2.2 Propriétés

Proposition 28. **(« Stabilité »)**

Soient $f: E \to F$ *et* $g: F \to G$ *deux applications.*

- *Si* f *et* g *sont injectives, alors* $g \circ f$ *est injective.*
- *Si* f *et* g *sont surjectives, alors* $g \circ f$ *est surjective.*
- *Si* f *et* g *sont bijectives, alors* $g \circ f$ *est bijective.*

Démonstration. □

Proposition 29. **(Unicité sous réserve d'existence)**

Soit $f: E \to F$ *une application. Si* f *admet une application réciproque, alors elle est unique.*

Démonstration. □

Proposition 30. **(Caractérisation des bijections)**

Soit $f: E \to F$ *une application. Alors :* f *est bijective si et seulement si* f *admet une application réciproque.*

Démonstration. □

Proposition 31. **(Réciproque d'une composée de deux bijections)**

Soient $f: E \to F$ *et* $g: F \to G$ *deux applications bijectives. Alors* $g \circ f$ *est bijective et*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. □

3 Méthodes de calcul

3.1 Calculer $\mathcal{D}_f$, $f(A)$, $f^{-}(B)$.

On se restreint dans un premier temps aux fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle.

Calculer le domaine de définition

Dans les cas pratiques, f s'exprime comme la composée de plusieurs fonctions. Si on a par exemple $f = g \circ h$, on a $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathcal{D}_h | h(x) \in \mathcal{D}_g\}$. Ce qui revient à déterminer les éléments de $\mathcal{D}_h$ ayant une image appartenant à $\mathcal{D}_g$.

Exercice 4. Calculer le domaine de définition de $x \mapsto \ln(1 - x^2)$.

Calculer l'image directe d'une partie

Dans les cas pratiques, il est possible d'étudier la fonction f. En étudiant les variations de f, vous pouvez alors lire directement $f(A)$ grâce au tableau de variations de f.

Exercice 5. Calculer l'image direct de $[-3, 4]$ de la fonction $x \mapsto x^3 - 3 \cdot x^2 + 1$

Calculer l'image réciproque d'une partie

On peut procéder comme précédemment, et lire $f^{-}(B)$ à l'aide du tableau de variations de f.

Une autre manière de procéder est d'étudier l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}$ de paramètre $y \in B$ suivante :

$$f(x) = y.$$

L'image réciproque est alors donnée par la réunion de toutes les solutions trouvées.

Exercice 6. Déterminer l'image réciproque de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par la fonction cos.

3.2 Justifier qu'une application est injective, surjective, etc.

On considère ici $f : E \to F$ une application.

Montrer que f est injective (ou non)

On peut utiliser la contraposée de la définition. On commence ainsi : soient x, y des éléments de E vérifiant $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.

Dans de nombreux cas, il est plus facile d'utiliser la contraposée de la définition : on dispose de nombreux outils pour manipuler des égalités.

« Tout montrer directement »

On peut procéder ainsi : On s'intéresse à l'équation d'inconnu $x \in E$ et de paramètre $y \in F$:

$$f(x) = y.$$

- Si pour tout $y \in F$ on trouve au plus une solution $x \in E$, alors f est injective,
- si pour tout $y \in F$ on trouve au moins une solution $x \in E$, alors f est surjective,
- si pour tout $y \in F$ on trouve exactement une solution $x \in E$, alors f est bijective. De plus, si on arrive à expliciter la solution, c'est-à-dire à écrire x en fonction de y ($x = g(y)$), on a également trouvé une expression de l'application réciproque de f.

Cette façon de procéder nous permet également de montrer qu'une application n'est pas injective (resp. pas surjective) : il suffit d'expliciter un élément y∈E pour lequel l'équation a plus de deux solutions (resp. n'a aucune solution).

Cas de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Pour les fonctions d'une variable réelle, il est également possible d'étudier les variations de f et d'en déduire si elle injective ou surjective (ou non).

Exercice 7. On considère $\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$. Montrer que l'application f est bijective et calculer la réciproque.