

DM 1 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

-
- Devoir à rendre le 17 septembre
 - Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.
-

Exercice 1. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} vérifiant :

- le nombre 0 est un élément de A ,
 - pour tout x réel si x est un élément de A alors $x + 1$ et $x - 1$ sont des éléments de A ,
 - pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, si x et y sont des éléments de A alors $\frac{x}{y}$ est un élément de A .
- Montrer que tout entier relatif est un élément de A . On pourra démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n et $-n$ sont des éléments de A .
 - Montrer que tout nombre rationnel est un élément de A .
 - On pose $B = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que B vérifie les propriétés (a), (b), (c).

Exercice 2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & 3u_n + 1 \end{cases} .$$

- Expliciter l'unique réel α vérifiant : $\alpha = 3\alpha + 1$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
- En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de u_n et de v_n en fonction de n .

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations d'inconnu réel x suivantes :

- $x^2 + x + 1 = 0$
- $e^{2x} - 3e^x - 1 = 0$
- $\frac{x^2 - x - 1}{2x^2 - 3} \geq 1$.

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'équation E_m d'inconnue réelle x par

$$x^4 - (2m + 4)x^2 + (m - 2)^2 = 0. \tag{E_m}$$

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation E_m en fonction du paramètre réel m .

Exercice 5. On dispose les entiers de 1 à 16 dans une grille de la façon suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

puis on colorie 8 cases en rouge et 8 cases en noir de sorte qu'il y ait autant de cases rouges et de cases noires pour chaque ligne et chaque colonne.

- Donner un exemple de grille coloriée vérifiant la propriété énoncée.
- En gardant votre exemple, calculer la somme de toutes les valeurs des cases coloriées en rouge. Faire de même avec les cases noires. Que remarquez-vous ?
- Montrer que la valeur de la somme des cases rouges de tout "bon" coloriage donne une même valeur que l'on explicitera.