DM 1 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

- Devoir à rendre le 17 septembre
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ vérifiant :

(a) le nombre 0 est un élément de A,

(b) pour tout x réel si x est un élément de A alors $x+1$ et $x-1$ sont des éléments de A,

(c) pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$, si x et y sont des élements de A alors $\frac{x}{y}$ est un élément de A.

1. Montrer que tout entier relatif est un élément de A. On pourra démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n et $-n$ sont des éléments de A.
2. Montrer que tout nombre rationnel est un élément de A.
3. On pose $B = \{a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$. Montrer que B vérifie les propriétés (a), (b), (c).

Correction

1. Montrons que tout entier relatif est un élément de A. Pour cela, on démontre la proposition P définie par :

$$P : \forall n \in \mathbb{N}, n \in A \text{ et } -n \in A.$$

Prouvons P par récurrence.

- Initialisation : d'après la proposition (a), 0 est un élément de A. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ l'est également. Par hypothèse de récurrence, n et $-n$ sont des éléments de A. D'après la proposition (b), on en déduit que $n+1$ et $(-n-1)$ sont des éléments de A. Ainsi, $(n+1)$ et $-(n+1)$ sont des éléments de A. La proposition $P(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n et $-n$ sont des éléments de A.

2. Montrons que $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble de A.
Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $(n,m) \in \mathbb{Z}^\star \times \mathbb{N}$ vérifiant : $r = \frac{n}{m}$. D'après la question 1, les entiers n et m sont des éléments de A. D'après la proposition (c), on en déduit que $\frac{n}{m}$ est un élément de A. Autrement dit $r \in A$.
Il en résulte que $\mathbb{Q}$ est bien un inclus dans A.

3. Montrons que l'ensemble B vérifie bien les propriétés $(a),(b),(c)$.
- On a $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$. Donc 0 est bien un élement de A et B vérifie la propriété (a).
- Soit r un élément de B. Montrons que $r+1$ et $r-1$ sont bien des éléments de B. Par définition, il existe $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $r = a + b\sqrt{2}$. D'où :

$$r + 1 = (a+1) + b\sqrt{2} \text{ et } r - 1 = (a-1) + b\sqrt{2}.$$

Or $a+1$ et $a-1$ sont bien des nombres rationnels. Donc $r+1$ et $r-1$ sont des éléments de B.
L'ensemble B vérifie bien la propriété (b).
- Soient r et de s deux éléments de B avec $s \neq 0$. Il existe donc a,b,c,d des rationnels vérifiant :

$$r = a + b\sqrt{2}, s = c + d\sqrt{2}.$$

Justifions dans un premier temps que $c - d\sqrt{2}$ est différent de 0. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} & c - d\sqrt{2} = 0 \\ \iff \quad & c = d\sqrt{2} \\ \iff \quad & (c = 0 \text{ et } d = 0) \text{ ou } (d \neq 0 \text{ et } \tfrac{c}{d} = \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Or $\sqrt{2}$ n'étant pas rationnel, on en déduit que

$$c - d\sqrt{2} = 0 \iff (c = 0 \text{ et } d = 0).$$

Or, la proposition $(c = 0, d = 0)$ implique que $(s = 0)$. D'où $(c - d\sqrt{2}) \implies (s = 0)$ est vraie. Or, par hypothèse, $s \neq 0$. Donc par la contraposée, on en déduit que $c - d\sqrt{2}$ est non nul. On utilisera ce résultat par la suite.
Montrons que $\frac{r}{s}$ est un élément de B. On a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{r}{s} & = & \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \\ & = & \frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})} \qquad (c - d\sqrt{2} \neq 0) \\ & = & \frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} \\ & = & \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} \end{array}.$$

Or a, b, c, d étant rationnels, on en déduit que $\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ et $\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ sont bien rationnels (le dénominateur est bien non nul car produit de s et $c - d\sqrt{2}$ qui sont tous les deux non nuls). Ainsi, $\frac{r}{s}$ est bien un élément de B.
Par conséquent, B vérifie bien la propriété (c).

L'ensemble B vérifie bien les propriétés $(a), (b), (c)$.

Exercice 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & 3u_n + 1 \end{array} \right. .$$

1. Expliciter l'unique réel α vérifiant : $\alpha = 3\alpha + 1$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?
3. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Correction

1. Résolvons d'abord l'équation d'inconnu réel x suivante :

$$x = 3x + 1.$$

Procédons par équivalence :

$$\begin{array}{rcl} x = 3x + 1 & \iff & -2x = 1 \\ & \iff & x = -\frac{1}{2} \end{array}.$$

On en déduit que l'unique réel α vérifiant $(\alpha = 3\alpha + 1)$ est le nombre $-\frac{1}{2}$.

2. Vérifions que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcll} v_{n+1} & = & u_{n+1} + \frac{1}{2} & (\text{ définition de } v_{n+1}) \\ & = & 3u_n + 1 + \frac{1}{2} & (\text{ définition de } u_{n+1}) \\ & = & 3u_n + \frac{3}{2} & \\ & = & 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) & \\ & = & 3v_n & (\text{définition de } v_n) \end{array}.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison 3.

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\frac{3}{2}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3^{n+1}}{2}}.$$

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}}.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations d'inconnu réel x suivantes :

1. $x^2+x+1=0$ 2. $e^{2x}-3e^x-1=0$ 3. $\frac{x^2-x-1}{2x^2-3} \geq 1$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation $(x^2+x+1=0)$ étant une équation du second degré à coefficients réels et de discriminant $\Delta = 1^2-4=-3<0$, on en déduit qu'elle n'a pas de solution réelle. D'où :
$$\boxed{S=\emptyset.}.$$

2. Résolvons l'équation d'inconnu réel x suivante : $e^{2x}-3e^x-1=0$. Posons $y=e^x$. L'équation est alors équivalente à :
$$y^2-3y-1=0.$$
On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta=13$. Par conséquent,
$$y^2-3y-1=0 \iff (y=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ ou } y=\frac{3+\sqrt{13}}{2}).$$
Or, $y=e^x$. D'où :
$$e^x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \text{ ou } e^x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}..$$
Mais $3^2=9<13$ et une exponentielle d'un réel est strictement positif. Donc l'égalité $e^x=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ est fausse. Du raisonnement précédent, on en déduit l'équivalence :
$$e^{2x}-3e^x-1=0 \iff (e^x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}).$$
Or $\frac{3+\sqrt{13}}{2}>0$. D'où
$$e^{2x}-3e^x-1=0 \iff x=\ln(\frac{3+\sqrt{13}}{2}).$$
On en conclut que $\boxed{S=\{\ln(\frac{3+\sqrt{13}}{2})\}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'inéquation $\frac{x^2-x-1}{2x^2-3} \geq 1$ est bien définie si et seulement si $x \notin \{\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\}$. Désormais, on suppose que x n'est pas un élément de cet ensemble. Raisonnons par équivalence :
$$\begin{aligned} \tfrac{x^2-x-1}{2x^2-3} \geq 1 &\iff \tfrac{x^2-x-1}{2x^2-3}-1 \geq 0 \\ &\iff \tfrac{x^2-x-1-(2x^2-3)}{2x^2-3} \geq 0 \\ &\iff \tfrac{-x^2-x+2}{2x^2-3} \geq 0 \end{aligned}.$$
Étudions alors le signe de $-x^2-x+2$ et de $2x^2-3$ en fonction de x. Ces expressions étant des polynômes du second degré, pour déterminer leur signe on calcule d'abords leurs racines. Pour le numérateur, on constate par calcul que les deux racines sont exactement 1 et -2. Concernant le dénominateur, on a vu que les racines sont exactement $-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}$. Or, $-2<-\frac{\sqrt{6}}{2}<1<\frac{\sqrt{6}}{2}$. On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}<x<1$	$x=1$	$1<x<\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}<x$
$-x^2-x+2$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$2x^2-3$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{-x^2-x+2}{2x^2-3}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Du tableau de signe, on en déduit que
$$\frac{x^2-x-1}{2x^2-3} \geq 1 \iff x \in [-2,-\frac{\sqrt{6}}{2}[\cup[1,\frac{\sqrt{6}}{2}[.$$
Donc :
$$\boxed{S=[-2,-\frac{\sqrt{6}}{2}[\cup[1,\frac{\sqrt{6}}{2}[}.$$

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'équation E_m d'inconnue réelle x par

$$x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2 = 0. \tag{E_m}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation E_m en fonction du paramètre réel m.

Correction

Soient $m \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = x^2$. L'équation (E_m) est alors équivalente à :

$$X^2 - (2m+4)X + (m-2)^2 = 0. \tag{A}$$

On reconnaît alors une équation du second degré, de discriminant $\Delta = (2m+4)^2 - 4(m-2)^2$. Donc Δ est égal à $4\left((m+2)^2 - (m-2)^2\right)$. D'où $\Delta = 32m$. On en déduit que (A) a des solutions réelles si et seulement si $m \geq 0$. Dans ce dernier cas,

$$X = \frac{(2m+4) + \sqrt{32m}}{2} \text{ ou } X = \frac{(2m+4) - \sqrt{32m}}{2}$$

Autrement dit,

$$X = (m+2) + 2\sqrt{2m} \text{ ou } X = (m+2) - 2\sqrt{2m}.$$

De l'étude précédente, en posant $X_1 = (m+2) + 2\sqrt{2m}$ et $X_2 = (m+2) - 2\sqrt{2m}$,

$$x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2 = 0 \iff \left(x^2 = X_1 \text{ ou } x^2 = X_2\right).$$

m étant positif, X_1 est bien positif. De plus, $X_1X_2 = (m-2)^2 \geq 0$. Donc X_2 est également positif. On en déduit que :

$$x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2 = 0 \iff x \in \{\sqrt{X_1}, -\sqrt{X_1}, \sqrt{X_2}, -\sqrt{X_2}\}.$$

En résumé,

m	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$S =$	$\emptyset$	$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$	$\{\sqrt{X_1}, -\sqrt{X_1}, \sqrt{X_2}, -\sqrt{X_2}\}$

où $X_1 = (m+2) + 2\sqrt{2m} = \left(\sqrt{m} + \sqrt{2}\right)^2$ et $X_2 = (m+2) - 2\sqrt{2m} = \left(\sqrt{m} - \sqrt{2}\right)^2$.

Exercice 5. On dispose les entiers de 1 à 16 dans une grille de la façon suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

puis on colorie 8 cases en rouge et 8 cases en noir de sorte qu'il y ait autant de cases rouges et de cases noires pour chaque ligne et chaque colonne.

1. Donner un exemple de grille coloriée vérifiant la propriété énoncée.
2. En gardant votre exemple, calculer la somme de toutes les valeurs des cases coloriées en rouge. Faire de même avec les cases noires. Que remarquez-vous ?
3. Montrer que la valeur de la somme des cases rouges de tout "bon" coloriage donne une même valeur que l'on explicitera.

Correction

1. La grille suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

vérifie les conditions données.

2. Sommons les valeurs des cases rouges : $2+4+6+7+9+12+13+15 = 68$.
De même, sommons les valeurs des cases noires : $1+3+5+8+10+11+14+16 = 68$.
On remarque que dans les deux cas, on retrouve la même valeur : 68.

3. Représentons différemment la grille :

$0+1$	$0+2$	$0+3$	$0+4$
$4+1$	$4+2$	$4+3$	$4+4$
$8+1$	$8+2$	$8+3$	$8+4$
$12+1$	$12+2$	$12+3$	$12+4$

Soit C un bon coloriage de la grille. Notons $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_8$ les 8 valeurs coloriées en rouge.
On s'intéresse à $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_8$. Du fait qu'il y a exactement deux cases rouges par ligne, il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \in \{1, 2, 3, 4\}^8$ tel que :

$$\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \alpha_3 = 4 + b_1, \alpha_4 = 4 + b_2, \alpha_5 = 8 + c_1, \alpha_6 = 8 + c_2, \alpha_7 = 8 + d_1, \alpha_8 = 8 + d_2,$$

Donc :

$$S = 0 + 0 + 4 + 4 + 8 + 8 + 12 + 12 + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2.$$

D'où

$$S = 48 + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2.$$

Or, dans un bon coloriage, il y a exactement deux cases rouges par colonne. Donc le 8-uplet $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ contient exactement deux 1, deux 2, deux 3 et deux 4. D'où

$$S = 48 + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4).$$

Il en résulte que

$$\boxed{S = 68.}$$