

DM 2 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

-
- Devoir à rendre le 8 octobre.
 - Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.
-

Exercice 1. On veut résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnu réel x

$$mx + 1 = \sqrt{x(x-1)} \quad (\text{E})$$

en fonction du paramètre réel m .

1. Décrire l'ensemble de définition D_E de l'équation (E).
2. Soient $x_0 \in D_E$ et $m \in \mathbb{R}$. Montrer que x_0 est solution de (E) si et seulement si :

$$(m^2 - 1)x_0^2 + (2m + 1)x_0 + 1 = 0 \text{ et } mx_0 + 1 \geq 0.$$

3. Résoudre l'équation (E) dans le cas où $m \in \{-\frac{5}{4}, -1, 0, 1\}$.
4. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solutions réelles dans le cas où $m < -\frac{5}{4}$.
5. Décrire l'ensemble des solutions de (E) en fonction du paramètre réel m . On pourra résumer les différentes possibilités dans un tableau.

Exercice 2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} \leq \sqrt{n} + 1$.

Exercice 3. Pour tout $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$N_1(A) = |x| + |y|, N_2(A) = \sqrt{x^2 + y^2}, N_\infty(A) = \max(|x|, |y|).$$

Et pour tout $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $B = (z, t) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $A + B$ et λA par :

$$A + B = (x + z, y + t), \lambda A = (\lambda x, \lambda y).$$

Soit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application. On dit que N est une norme si :

- $\forall A \in \mathbb{R}^2, (N(A) = 0) \implies (A = (0, 0))$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda A) = |\lambda|N(A)$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N(A + B) \leq N(A) + N(B)$.

Soient M, N deux normes. On dit que M est équivalente à N si :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

Attention à ne pas confondre "équivalence logique" et "équivalence de normes".

1. Soient M, N deux normes. Montrer que M est équivalente à N si et seulement si N est équivalente à M .
2. Soient M, N, P trois normes. Montrer que si M est équivalente à N et que N est équivalente à P alors M est équivalente à P .
3. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes.
4. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont toutes équivalentes entre elles.