

DM 2 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

-
- Devoir à rendre le 8 octobre.
 - Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.
-

Exercice 1. On veut résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnu réel x

$$mx + 1 = \sqrt{x(x-1)} \quad (\text{E})$$

en fonction du paramètre réel m .

1. Décrire l'ensemble de définition D_E de l'équation (E).
2. Soient $x_0 \in D_E$ et $m \in \mathbb{R}$. Montrer que x_0 est solution de (E) si et seulement si :

$$(m^2 - 1)x_0^2 + (2m + 1)x_0 + 1 = 0 \text{ et } mx_0 + 1 \geq 0.$$

3. Résoudre l'équation (E) dans le cas où $m \in \{-\frac{5}{4}, -1, 0, 1\}$.
4. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solutions réelles dans le cas où $m < -\frac{5}{4}$.
5. Décrire l'ensemble des solutions de (E) en fonction du paramètre réel m . On pourra résumer les différentes possibilités dans un tableau.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation (E) est défini si et seulement si $x(x-1) \geq 0$. Or $x(x-1)$ est positif si et seulement si $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Donc :

$$D_E =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$

2. Soient $x_0 \in D_E$, $m \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} mx_0 + 1 = \sqrt{x_0(x_0 - 1)} &\iff (mx_0 + 1)^2 = x_0(x_0 - 1) && \text{et } mx_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff m^2x_0^2 + 2mx_0 + 1 = x_0^2 - x_0 && \text{et } mx_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff (m^2 - 1)x_0^2 + (2m + 1)x_0 + 1 = 0 && \text{et } mx_0 + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Résolvons l'équation dans chacun des cas.

— Cas 1 : $m = -\frac{5}{4}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \frac{9}{16}x_0^2 - \frac{6}{4}x_0 + 1 = 0 && \text{et } -\frac{5}{4}x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff \left(\frac{3}{4}x_0 - 1\right)^2 = 0 && \text{et } -\frac{5}{4}x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff x_0 = \frac{4}{3} && \text{et } -\frac{5}{4}x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff x_0 = \frac{4}{3} && \text{et } -\frac{2}{3} \geq 0 \\ &\iff \text{FAUX} \end{aligned}$$

Il en résulte que $S = \emptyset$.

— Cas 2 : $m = -1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}(E) &\iff -x_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad -x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff x_0 = 1\end{aligned}$$

On a donc $S = \{1\}$.

— Cas 3 : $m = 0$

Donc :

$$\begin{aligned}(E) &\iff -x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad +1 \geq 0 \\ &\iff -x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ &\iff x_0^2 - x_0 - 1 = 0\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 5$ Il en résulte que :

$$(E) \iff x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Donc $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

— Cas 4 : $m = 1$. L'équation (E) est donc équivalente à

$$3x_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x_0 + 1 \geq 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$x_0 = -\frac{1}{3}.$$

Donc $S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

4. Calculons le discriminant de (E). On a :

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 - 1) = 4m + 1 + 4 = 4m + 5.$$

Si $m < -\frac{5}{4}$, on a alors $\Delta < 0$. Dans ce cas, $S = \emptyset$.

5. On se place désormais dans le cas $m > -\frac{5}{4}$, $m \neq -1$, $m \neq 1$. Des calculs précédents, on en déduit que

$$(E) \iff \left(x_0 = \frac{-2m - 1 - \sqrt{4m + 5}}{2(m^2 - 1)} \quad \text{ou} \quad x_0 = \frac{-2m - 1 + \sqrt{4m + 5}}{2(m^2 - 1)} \right) \quad \text{et} \quad (mx_0 + 1 \geq 0).$$

Soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et posons $y_0 = \frac{-2m - 1 + \epsilon\sqrt{4m + 5}}{2(m^2 - 1)}$. Étudions l'inéquation I définie par

$$my_0 + 1 \geq 0.$$

Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}(I) &\iff m \frac{-2m - 1 + \epsilon\sqrt{\Delta}}{2(m^2 - 1)} + 1 \geq 0 \\ &\iff \frac{m(-2m - 1 + \epsilon\sqrt{\Delta}) + 2m^2 - 2}{2(m^2 - 1)} \geq 0 \\ &\iff \frac{-m - 2 + \epsilon m\sqrt{\Delta}}{m^2 - 1} \geq 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du numérateur.

$$\begin{aligned}
 -m - 2 + \epsilon m \sqrt{\Delta} \geq 0 &\iff \epsilon m \sqrt{4m+5} \geq m+2 \\
 &\iff m^2(4m+5) \geq (m+2)^2 \quad \text{et } m, \epsilon \text{ de même signe, } m \geq -\frac{5}{4} \\
 &\iff 4m^3 + 4m^2 - 4m - 4 \geq 0 \quad \text{et } m, \epsilon \text{ de même signe, } m \geq -\frac{5}{4} \\
 &\iff m^3 + m^2 - m - 1 \geq 0 \quad \text{et } m, \epsilon \text{ de même signe, } m \geq -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Or, on constate qu'en développant $(X+1)^2(X-1)$ on obtient $X^3 + X^2 - X - 1$. D'où :

$$-m - 2 + \epsilon m \sqrt{\Delta} \geq 0 \iff m \geq 1 \text{ et } m, \epsilon \text{ de même signe.}$$

On en déduit le signe du numérateur de $my_0 + 1$ en fonction de ϵ et de m :

m	$m < 1$	$m = 1$	$1 < m$
$\epsilon = 1$	-	0	+
$\epsilon = -1$	-	-	-

De l'étude du signe du numérateur et du dénominateur, on en déduit le signe de $my_0 + 1$:

m	$m < -1$	$m = -1$	$-1 < m < 1$	$m = 1$	$1 < m$
$\epsilon = 1$	-	X	+	X	+
$\epsilon = -1$	-	X	+	X	-

Résumons alors dans un tableau les différentes possibilités.

m	$m < -1$	$m = -1$	$-1 < m < 1$	$m = 1$	$1 < m$
S	\emptyset	$\{1\}$	$\left\{ \frac{-2m-1+\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)}, \frac{-2m-1-\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)} \right\}$	$\left\{ -\frac{1}{3} \right\}$	$\left\{ \frac{-2m-1+\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)} \right\}$

Exercice 2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} \leq \sqrt{n} + 1$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) : \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} \leq \sqrt{n} + 1.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $0 \leq 1$ ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. $P(n)$ étant vraie par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}} \leq \sqrt{n} + 1.$$

Donc :

$$n + 1 + \sqrt{n+1} \leq n + 1 + \sqrt{n} + 1$$

Par croissance de la fonction racine carrée et par positivité des nombres .. on en déduit que :

$$\sqrt{n+1+\sqrt{n+..}} \leq \sqrt{n+1+\sqrt{n}+1}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\sqrt{n+1+\sqrt{n}+1} \leq \sqrt{n+1}+1$. Ces nombres étant positifs, par strict croissance de la fonction carrée sur \mathbb{R}^+ , on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1+\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1}+1 &\Leftrightarrow n+1+\sqrt{n+1} \leq (n+1)+2\sqrt{n+1}+1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \sqrt{4(n+1)} \\ &\Leftrightarrow n \leq 4(n+1) \text{ (strict croissance de la fonction racine carrée sur } \mathbb{R}^+) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 3n+4 \\ &\Leftrightarrow \text{VRAI (} n \geq 0) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sqrt{n+1\sqrt{n}+1} \leq \sqrt{n+1}+1, \text{ et } \sqrt{n+1+\sqrt{n+..}} \leq \sqrt{n+1+\sqrt{n}+1}.$$

D'où :

$$\sqrt{n+1+\sqrt{n+..}} \leq \sqrt{n+1}+1.$$

$P(n+1)$ est bien vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 3. Pour tout $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$N_1(A) = |x| + |y|, N_2(A) = \sqrt{x^2 + y^2}, N_\infty(A) = \max(|x|, |y|).$$

Et pour tout $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $B = (z, t) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $A + B$ et λA par :

$$A + B = (x + z, y + t), \lambda A = (\lambda x, \lambda y).$$

Soit $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ une application. On dit que N est une norme si :

- $\forall A \in \mathbb{R}^2, ((N(A) = 0) \implies (A = (0, 0)))$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda A) = |\lambda|N(A)$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N(A + B) \leq N(A) + N(B)$.

Soient M, N deux normes. On dit que M est équivalente à N si :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

Attention à ne pas confondre "équivalence logique" et "équivalence de normes".

1. Soient M, N deux normes. Montrer que M est équivalente à N si et seulement si N est équivalente à M .
2. Soient M, N, P trois normes. Montrer que si M est équivalente à N et que N est équivalente à P alors M est équivalente à P .
3. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes.
4. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont toutes équivalentes entre elles.

Correction

1. Soient M, N deux normes. On raisonne par double implication.

— Supposons que M est équivalente à N . Il existe donc $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que :

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

Donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, N(A) \leq \frac{1}{\alpha} M(A) \text{ et } \frac{1}{\beta} M(A) \leq N(A).$$

Autrement dit,

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{\beta} M(A) \leq N(A) \leq \frac{1}{\alpha} M(A).$$

— Réciproquement, on reprend la démonstration précédente en échangeant les rôles de M et de N .

2. Soient M, N, P trois normes. Supposons que M est équivalente à N et que N est équivalente à P . Il existe alors $\alpha > 0, \beta > 0, a > 0, b > 0$ tels que :

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A) \text{ et } aP(A) \leq N(A) \leq bP(A).$$

Montrons que M est équivalente à P . Soit $A \in \mathbb{R}^2$. On a $aP(A) \leq N(A)$ et $N(A) \leq bP(A)$. Or $\alpha > 0, \beta > 0$. Donc :

$$a\alpha P(A) \leq \alpha N(A) \text{ et } \beta N(A) \leq b\beta P(A).$$

Par définition de l'équivalence de normes,

$$\alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

Donc

$$a\alpha P(A) \leq M(A) \leq b\beta P(A).$$

Il en résulte que :

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, a\alpha P(A) \leq M(A) \leq b\beta P(A)$$

$a\alpha$ et $b\beta$ étant strictement positifs. M est bien équivalente à P .

3. (a) Montrons que N_1 est une norme.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $N_1((x, y)) = 0$. On a

$$|x| + |y| = 0.$$

Par positivité des valeurs absolues, on en déduit que

$$|x| = 0, |y| = 0.$$

Autrement dit, $x = 0, y = 0$. On a bien,

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, (N_1(A) = 0) \implies A = (0, 0).}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} N_1((\lambda x, \lambda y)) &= |\lambda x| + |\lambda y| \\ &= |\lambda|(|x| + |y|) \\ &= |\lambda|N_1((x, y)) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_1(\lambda A) = |\lambda|N_1(A).}$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (z, t) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} N_1((x, y) + (z, t)) &= N_1((x + z, y + t)) \\ &= |x + z| + |y + t| \\ &\leq |x| + |z| + |y| + |t| && \text{D'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq (|x| + |y|) + (|z| + |t|) \\ &\leq N_1((x, y)) + N_1((z, t)) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N_1(A + B) \leq N_1(A) + N_1(B).}$$

N_1 vérifie bien les trois propriétés d'une norme. Donc N_1 est une norme.

(b) Montrons que N_2 est une norme. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $N_2((x, y)) = 0$. On a

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Donc

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Par positivité des carrés, on a donc $x^2 = 0, y^2 = 0$. Autrement dit, $x = 0, y = 0$. On a bien,

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, (N_2(A) = 0) \implies A = (0, 0).}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} N_2((\lambda x, \lambda y)) &= \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} \\ &= |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= |\lambda| N_2((x, y)) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_2(\lambda A) = |\lambda| N_2(A).}$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (z, t) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} N_2((x, y) + (z, t)) &= N_2((x + z, y + t)) \\ &= \sqrt{(x + z)^2 + (y + t)^2} \end{aligned}$$

Posons $\alpha = x + iy$ et $\beta = z + it$. Constatons que

$$N_2((x, y) + (z, t)) = |\alpha + \beta|$$

D'après l'inégalité triangulaire dans \mathbb{C} , on a donc

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Or $|\alpha| = N_2((x, y))$ et $|\beta| = N_2((z, t))$. D'où

$$N_2((x, y) + (z, t)) \leq N_2((x, y)) + N_2((z, t)).$$

On a donc

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N_2(A + B) \leq N_2(A) + N_2(B).}$$

N_2 vérifie bien les trois propriétés d'une norme. Donc N_2 est une norme.

(c) Montrons que N_∞ est une norme. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $N_\infty((x, y)) = 0$. On a

$$\max(|x|, |y|) = 0$$

Donc

$$|x| \leq 0, |y| \leq 0.$$

Par positivité des valeurs absolues, on a donc $|x| = 0, |y| = 0$. Autrement dit, $x = 0, y = 0$. On a bien,

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, (N_\infty(A) = 0) \implies A = (0, 0).}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} N_\infty((\lambda x, \lambda y)) &= \max(|\lambda x|, |\lambda y|) \\ &= \max(|\lambda| |x|, |\lambda| |y|) \\ &= |\lambda| \max(|x|, |y|) \\ &= |\lambda| N_\infty((x, y)) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_\infty(\lambda A) = |\lambda|N_\infty(A).$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (z, t) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} N_\infty((x, y) + (z, t)) &= N_\infty((x + z, y + t)) \\ &= \max(|x + z|, |y + t|) \\ &\leq \max(|x| + |z|, |y| + |t|) \quad \text{par inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

Mais $|x| \leq N_\infty((x, y))$ et $|z| \leq N_\infty((z, t))$. Donc $|x| + |z| \leq N_\infty((x, y)) + N_\infty((z, t))$.

De la même façon, $|y| \leq N_\infty((x, y))$ et $|t| \leq N_\infty((z, t))$. Donc $|y| + |t| \leq N_\infty((x, y)) + N_\infty((z, t))$.

Donc :

$$\max(|x| + |z|, |y| + |t|) \leq N_\infty((x, y)) + N_\infty((z, t)).$$

On a donc

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N_\infty(A + B) \leq N_\infty(A) + N_\infty(B).$$

N_∞ vérifie bien les trois propriétés d'une norme. Donc N_∞ est une norme.

4. Soit $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| \text{ et } y^2 \leq x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y|$$

par positivité des carrés et des valeurs absolues. Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ , on en déduit que

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \text{ et } |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

Il en résulte que :

$$N_\infty((x, y)) \leq N_2((x, y)) \leq N_1((x, y)).$$

De plus, $N_1((x, y)) = |x| + |y| \leq N_\infty((x, y)) + N_\infty((x, y)) = 2N_\infty((x, y))$. D'où :

$$N_\infty((x, y)) \leq N_2((x, y)) \leq N_1((x, y)) \leq 2N_\infty((x, y)).$$

Il en résulte que N_2 est équivalente à N_∞ et que N_1 est équivalente à N_∞ . D'après les questions 1 et 2, on en déduit que ces trois normes sont équivalentes entre elles.