DM 3 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

— Devoir à rendre le 12 novembre.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On cherche à démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et on s'intéresse au cas d'égalité. Dans l'exercice, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\Re(z) \leq \mid z \mid$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\Re(z) = \mid z \mid$ si et seulement si z est un réel positif.
3. Soient z, w deux nombres complexes.
   (a) Montrer que $\mid z + w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid$ si et seulement si $\Re(z\overline{w}) \leq \mid z\overline{w} \mid$.
   (b) En déduire l'inégalité triangulaire.
   (c) En déduire que $\mid z + w \mid = \mid z \mid + \mid w \mid$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{C}$, λ et μ des réels positifs vérifiant $\lambda a = z$ et $\mu a = w$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \min(k, n-k)\binom{n}{k}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \max(k, n-k)\binom{n}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}, \min(k, n-k) + \max(k, n-k) = n$. Puis simplifier $A_n + B_n$.
2. Montrer que $A_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k}$.
3. En déduire A_n, B_n.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E : 2\sin(x) = \sqrt{1 + \sin(2x)} + \sqrt{1 - \sin(2x)}$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left(i^2 - j^2\right)$ 2. $T_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \left(3i^2 - j^2\right)$