DM 3 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

- Devoir à rendre le 12 novembre.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On cherche à démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et on s'intéresse au cas d'égalité. Dans l'exercice, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

1. Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\Re(z) \leq \mid z \mid$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\Re(z) = \mid z \mid$ si et seulement si z est un réel positif.
3. Soient z, w deux nombres complexes.
   (a) Montrer que $\mid z+w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid$ si et seulement si $\Re(z\overline{w}) \leq \mid z\overline{w} \mid$.
   (b) En déduire l'inégalité triangulaire.
   (c) En déduire que $\mid z+w \mid = \mid z \mid + \mid w \mid$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{C}$, λ et μ des réels positifs vérifiant $\lambda a = z$ et $\mu a = w$.

Correction

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, on note a sa partie réelle, et b sa partie imaginaire.
   On a : $a^2 \leq a^2 + b^2$ car $b^2 \geq 0$. Donc
   $$\mid a \mid \leq \sqrt{a^2+b^2}.$$
   Or, $\mid a \mid \geq a$. D'où $a \leq \sqrt{a^2+b^2}$.
   Cette démonstration étant valide pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en conclut que
   $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \Re(z) \leq \mid z \mid}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $a = \Re(z), b = \Im(z)$.
   Raisonnons par double implication.
   - Supposons que $a = \sqrt{a^2+b^2}$. On peut d'ore et déjà affirmer que $a \geq 0$.
     En élevant au carré, on en déduit que : $a^2 = a^2 + b^2$. Donc $b^2 = 0$. Autrement dit, $b = 0$. Ainsi, a est positif et b est nul. Autrement dit, z est un réel positif.
   - SUpposons que z est un réel positif. On a alors $\mid z \mid = \Re(z) = a$.

   Par double implication, on en déduit qu'il y a bien équivalence. La démonstration donnée étant valide pour tout $z \in \mathbb{C}$, on en conclut que
   $$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \Re(z) = z \iff z \in \mathbb{R}^+}$$

3. Soient z, w deux nombres complexes.
   (a) Raisonnons par équivalence. On note $(I) : \mid z+w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid$. Les modules étant positifs, par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a l'équivalence :
   $$(I) \iff \mid z+w \mid^2 \leq (\mid z \mid + \mid w \mid)^2$$
   Or $\mid z+w \mid^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$. En développant, on a alors :
   $$(I) \iff z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \leq \mid z \mid^2 + 2 \mid z \mid\mid w \mid + \mid w \mid^2 .$$

Donc

$$(I) \iff z\overline{w} + \overline{z}w \leq 2 \mid z \mid\mid w \mid .$$

Or $\mid w \mid = \mid \overline{w}$ et $\overline{z}w = \overline{z\overline{w}}$. Donc

$$(I) \iff 2\Re\left(z\overline{w}\right) \leq 2 \mid z \mid\mid \overline{w} \mid .$$

Donc, par multiplicativité du module :

$$(I) \iff 2\Re\left(z\overline{w}\right) \leq 2 \mid z\overline{w} \mid .$$

On a bien l'équivalence demandée.

(b) D'après la question 1, on sait que $\Re\left(z\overline{w}\right) \leq \mid z\overline{w} \mid$. Donc la dernière proposition est vraie. Par équivalence, on en déduit que
$$\mid z+w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid .$$

(c) Par les mêmes calculs et d'après la question 2, on en déduit que

$$\mid z+w \mid = \mid z \mid + \mid w \mid \iff z\overline{w} \in \mathbb{R}^+.$$

Il nous suffit de montrer par double implication que $z\overline{w} \in \mathbb{R}^+$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{C}$, λ et μ des réels positifs vérifiant $\lambda a = z$ et $\mu a = w$.

— Supposons que $z\overline{w} \in \mathbb{R}^+$.
  Procédons par disjonction de cas.
  — Cas 1 : $w = 0$
    et on a $0 \cdot z = w, 1 \cdot z = z$. Ainsi, on a l'équivalence demandée.
  — Cas 2 : $w \neq 0$.
    Posons $r = z\overline{w}$. On sait que $r \geq 0$.
    On a alors : $rw = z \mid w \mid^2$. Or $w \neq 0$. Donc $z = \frac{r}{|w|^2}w$. De plus $w = 1 \cdot w$.
  Par disjonction de cas, on en déduit la propriété demandée.
— Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, λ et μ des réels positifs tels que $z = \lambda a w = \mu a$.
  On a alors $z\overline{w} = \lambda\mu \mid a \mid^2$ qui est un produit de réels positifs. Ainsi, $z\overline{w}$ est bien un réel positif.

Par double implication, on en déduit la proposition demandée.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \min(k, n-k)\binom{n}{k}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \max(k, n-k)\binom{n}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}, \min(k, n-k) + \max(k, n-k) = n$. Puis simplifier $A_n + B_n$.
2. Montrer que $A_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k}$.
3. En déduire A_n, B_n.

Correction

1. On a
$$A_n + B_n \quad = \quad \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left(\min(k, n-k) + \max(k, n-k)\right)\binom{n}{k}$$
Or, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\min(k, n-k) + \max(k, n-k) = k + n - k$ ou $n - k + k$. Donc $\min(k, n-k) + \max(k, n-k) = k + n - k$.
Donc
$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k}$$
D'où
$$\boxed{A_n + B_n = n2^n.}$$

2. On a
$$\begin{array}{rcll} A_n & = & \sum_{k=0}^{n} \min(k, n-k)\binom{n}{k} & \\ & = & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k\binom{n}{k} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n} (n-k)\binom{n}{k} & \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k\binom{n}{k} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} (n-k)\binom{n}{k} & \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} (n-k)\binom{n}{n-k} & \text{(symétrie)} \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{n-k-1} & \text{(formule du Pion)} \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k} & \end{array}$$

3. Calculons A_n. En effectuant le changement de variable $k' = k-1$ dans la première somme, on trouve
$$A_n = \sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} n\binom{n-1}{k} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k}.$$
D'où
$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} - n\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$
Donc
$$\boxed{A_n = n2^{n-1} - n\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$
Or $B_n = n2^n - A_n$. Donc
$$B_n = n2^n - n2^{n-1} + n\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$
Donc
$$\boxed{B_n = n\left(2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right).}$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E : 2\sin(x) = \sqrt{1+\sin(2x)} + \sqrt{1-\sin(2x)}$.

Correction

Comme $|\sin(2x)| \leq 1$ pour tout x réel, on en déduit que cette équation est bien définie pour tout réel. Raisonnons par équivalence. Supposons que l'on a :

$$\begin{array}{lrcl} & 2\sin(x) & = & \sqrt{1+\sin(2x)} + \sqrt{1-\sin(2x)} \\ \Leftrightarrow & 2\sin(x) & = & \sqrt{\cos(x)^2+\sin(x)^2+2\sin(x)\cos(x)} + \sqrt{\cos(x)^2+\sin(x)^2-2\sin(x)\cos(x)} \\ \Leftrightarrow & 2\sin(x) & = & \sqrt{(\cos(x)+\sin(x))^2} + \sqrt{(\cos(x)-\sin(x))^2} \\ \Leftrightarrow & 2\sin(x) & = & |\cos(x)+\sin(x)| + |\cos(x)-\sin(x)| \\ \Leftrightarrow & 4\sin(x)^2 & = & (\cos(x)+\sin(x))^2 + (\cos(x)-\sin(x))^2 + 2|\cos(x)^2-\sin(x)^2| \text{ et } \sin(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 4\sin(x)^2 & = & 2\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2 + 2|\cos(2x)| \text{ et } \sin(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 4(\frac{1-\cos(2x)}{2}) & = & 2 + 2|\cos(2x)| \text{ et } \sin(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2-2\cos(2x) & = & 2 + 2|\cos(2x)| \text{ et } \sin(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -\cos(2x) & = & |\cos(2x)| \text{ et } \sin(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \cos(2x) \leq 0 & \text{et} & \sin(x) \geq 0 \end{array}$$

Or, pour $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$. On se restreint donc maintenant à l'intervalle $[0, \pi]$. Et sur cet intervalle,
$$\cos(2x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}.$$
Comme ces deux fonctions sont 2π-périodiques, il en résulte que :
$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

Exercice 4. Soit $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(i^2 - j^2\right)$ 2. $T_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \left(3i^2 - j^2\right)$

Correction

Résultats non détaillés :

1. On constate que $S_n = -S_n$. Donc $\boxed{S_n = 0}$.
2. On a

$$\begin{array}{rcl} T_n & = & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \left(3i^2 - j^2\right) \\ & = & \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j 3i^2 - \sum_{i=1}^j j^2\right) \\ & = & \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j+1)(2j+1)}{2} - j^3\right) \\ & = & \sum_{j=1}^n \left(\frac{3j^2}{2} + \frac{j}{2}\right) \\ & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} \\ & = & \boxed{\dfrac{n(n+1)^2}{2}} \end{array}$$