DM 4 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

— Devoir à rendre le 17 décembre

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On considère un jeu de 52 cartes. On tire 13 cartes. On rappelle qu'une carte est caractérisée par une valeur (AS,deux,...,dix, valet, dame, roi) et une couleur (pique, coeur, trèfle, carreau).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de possibilités d'avoir 13 cartes de valeurs différentes.
3. Déterminer le nombre de possibilités de n'avoir aucun 2 dans sa main.
4. Déterminer le nombre de possibilités de n'avoir aucune "flush" (5 cartes de la même couleur).

Exercice 2. Une urne contient n boules noires et p boules blanches avec n et p des entiers strictement positifs.

1. On tire une à une toutes les boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Soit $k \in \{1, \cdots, n+p\}$. On note E_k l'ensemble des tirages dont la dernière boule noire est situé au rang k. Montrer que $(E_k)_{n \leq k \leq n+p}$ forme une partition de l'ensemble des tirages. En déduire la valeur de
$$S = \sum_{k=n}^{n+p} \binom{k-1}{n-1}.$$

Exercice 3. On pose $S = \{0,1,2\}^4$. Soient A, B, C trois éléments distincts deux à deux de S. On dit que $\{A, B, C\}$ est un set si $(A+B+C) \in \{0,3,6\}^4$.

1. Combien y-a-t-il d'éléments dans S ?
2. Combien y-a-t-il de sets ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2+\cos x)\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le repère (O, i, j)

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.
   (b) En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.
   (c) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{1-x}$.
   (b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. (a) Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,4]$.