DS 1 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par récurrence : $S_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^\star, S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 2. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^{4x} - e^{2x} + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ 2. $\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+3x-4} = 0$ dans $\mathbb{R}$. 3. $|2x-1| \leq |x+7|$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 2\sqrt{x+1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
   Montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Exercice 4 (Un problème de logique)**.** Trois personnes, A, B, C possèdent chacun un entier naturel non nul mystère qu'on cherche à retrouver. On note respectivement N_A, N_B, N_C les entiers de A, B, C. On sait initialement que la somme des trois nombres est égale à 14. Ces trois personnes ont la conversation suivante :

- A : je ne sais pas ce qu'ont les autres, mais grâce à N_A je peux affirmer que B et C ont des nombres différents.
- B : sans prendre en compte l'affirmation de A, je peux affirmer avec N_B que les trois nombres mystères sont tous différents.
- C : en prenant en compte les affirmations de A et B, je connais les valeurs de N_A, N_B, N_C.

1. Justifier que N_A est nécessairement un nombre impair.
2. Justifier que N_B appartient nécessairement à l'ensemble $\{7, 9, 11\}$.
3. Montrer que $N_C \in \{2, 4, 6\}$.
4. Montrer que si $N_C \in \{2, 4\}$, alors C ne peut pas conclure.
5. En déduire N_A, N_B, N_C.

Exercice 5. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x en fonction du paramètre réel m :

$$mx^2 + x + \frac{m}{4} = 0.$$

Exercice 6. On cherche à démontrer les propositions suivantes :

- P_1 : toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
- P_2 : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Pour cela, on pourra uniquement utiliser le théorème suivant :

T : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On rappelle également que $\mathbb{Z}$ n'est ni majorée, ni minorée.

1. Donner une définition à l'aide de symboles logiques de : "$\mathbb{Z}$ n'est pas minorée".
2. On veut démontrer P_1. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.

(a) Justifier qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $\forall a \in A, k_0 \leq a$.
(b) On pose $C = \{a - k_0, a \text{ décrit } A\}$. Justifier que C admet un plus petit élément qu'on note c_0.
(c) Montrer que $c_0 + k_0$ est le plus petit élément de A.
(d) Conclure.

3. On veut démontrer P_2. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$.
   (a) On pose $B = \{-a, a \text{ décrit } A\}$. Montrer que B est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que B admet un plus petit élément qu'on note b_0.
   (c) Montrer que $-b_0$ est le plus grand élément de A.
   (d) Conclure.