DS 1 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par récurrence : $S_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^\star, S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Correction

Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$P(n) : S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Démontrons P par récurrence.

1. Initialisation :
   on a $S_1 = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.
2. Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de S_{n+1}, on a

   $$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   D'après $P(n)$, on obtient

   $$S_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(1+n)^2}.$$

   Pour conclure, montrons que $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(1+n)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Pour cela, on raisonne par équivalence :

   $$\begin{aligned} 2 - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{(1+n)^2} \leq 2 - \tfrac{1}{n+1} &\iff \tfrac{1}{(n+1)^2} \leq \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\ &\iff \tfrac{1}{(n+1)^2} \leq \tfrac{n+1-n}{n(n+1)} \\ &\iff \tfrac{1}{(n+1)^2} \leq \tfrac{1}{n(n+1)} \\ &\iff 0 \leq \tfrac{1}{n(n+1)} - \tfrac{1}{(n+1)^2} \\ &\iff 0 \leq \tfrac{(n+1)-n}{n(n+1)^2} \\ &\iff 0 \leq \tfrac{1}{n(n+1)^2} \end{aligned}.$$

   n étant supérieur à 1, cette dernière égalité est donc vraie. Par équivalence, on en déduit que la première inégalité est vraie. Par transitivité des inégalités, on en déduit que

   $$S_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

   $P(n+1)$ est donc vraie.
3. Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

   $$\boxed{\forall n \geq 1, S_n \leq 2 - \frac{1}{n}}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^{4x}-e^{2x}+1=0$ dans $\mathbb{R}$ 2. $\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3x-4}=0$ dans $\mathbb{R}$. 3. $|2x-1|\leq|x+7|$ dans $\mathbb{R}$.

Correction

1. On cherche les solutions réelles de $e^{4x}-e^{2x}+1=0$. Posons $X=e^{2x}$. L'équation est alors équivalente à :
$$X^2-X+1=0.$$
avec $X>0$. Or cette équation n'a pas de solution réelle. Donc l'équation $e^{4x}-e^{2x}+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. On a :
$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3x-4} & = & 0 \\ \Rightarrow\ (\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+3x-4})(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+3x-4}) & = & 0 \end{array}$$
On a donc :
$$x^2-2-(x^2+3x-4)=0,$$
D'où : $-3x+2=0$. Nécessairement, $x=\frac{2}{3}$. Or $(\frac{2}{3})^2-2$ étant strictement négatif, ce nombre n'a pas de racine carrée. Donc $\frac{2}{3}$ n'est pas solution de l'équation initiale. On en déduit que cette équation n'a pas de solution réelle.
3. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ et par positivité des valeurs absolues, on a
$$|2x-1|\leq|x+7| \iff |2x-1|^2\leq|x+7|^2.$$
Raisonnons par équivalences succesives :
$$\begin{array}{rcl} |2x-1|^2\leq|x+7|^2 & \iff & (2x-1)^2\leq(x+7)^2 \\ & \iff & (2x-1)^2-(x+7)^2\leq 0 \\ & \iff & (2x-1-(x+7))(2x-1+(x+7))\leq 0 \\ & \iff & (x-8)(3x+6)\leq 0 \\ & \iff & (x-8)(x+2)\leq 0 \\ & \iff & x\in[-2,8] \end{array}.$$
On en déduit que
$$\boxed{S=[-2,8]}.$$

Exercice 3. 1. Montrer que pour tout $x>0$, on a : $2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}>2\sqrt{x+1}$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Montrer que pour tout $n\geq 1$,
$$2\sqrt{n+1}-2\leq S_n\leq 2\sqrt{n}-1.$$

Correction

1. Soit $x>0$. On raisonne par équivalence :
$$\begin{array}{rcll} 2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>2\sqrt{x+1} & \Leftrightarrow & 2x+1>2\sqrt{x+1}\sqrt{x} & (\sqrt{x}>0) \\ & \Leftrightarrow & (2x+1)^2>4x(x+1) \text{ et } 2x+1>0, x>0 & (\text{fonction carrée strictement croissante sur } \mathbb{R}^+) \\ & \Leftrightarrow & 4x^2+4x+1>4x^2+4x,\ x>0 & (\text{si } x>0 \text{ alors } 2x+1>0) \\ & \Leftrightarrow & 1>0,\ x>0 & \end{array}$$
Cette dernière proposition est vraie. Par équivalence, on en déduit que
$$2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>2\sqrt{x+1}.$$
est vraie.
2. On pose
$$\forall n\geq 1, P(n): 2\sqrt{n+1}-2\leq S_n\leq 2\sqrt{n}-1.$$
Montrons par récurrence que pour tout $n\geq 1$, $P(n)$ est vraie.
— Initialisation : pour $n=1$, on a $2\sqrt{n+1}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)<2\frac{1}{2}=1$, $S_1=1$ et $2\sqrt{n}-1=1$. On a bien
$$2\sqrt{n+1}-2\leq S_n\leq 2\sqrt{n}-1.$$

— Hérédité :soit n un entier supérieur à 1. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après $P(n)$, on a

$$2\sqrt{n+1}-2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}-1.$$

En ajoutant $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ à ces inégalités, on obtient

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq S_{n+1} \leq 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$2\sqrt{n+2}-2 \leq 2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{1}$$

et

$$2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}-1. \tag{2}$$

On a

$$2\sqrt{n+2}-2 \leq 2\sqrt{n+1}-2+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n+2} \leq \sqrt{n+1}+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Mais $n \geq 1$, donc $n+1>0$. D'après la question 1, on en déduit que

$$\sqrt{n+2} \leq \sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Par équivalence, on en déduit que l'inégalité (1) est vraie.
On a

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n}-1+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}-1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \leq 2(n+1) \qquad (\text{ car } \sqrt{n+1}>0) \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leq 2n+1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4n(n+1) \leq (2n+1)^2,\ n \geq 1 \qquad (\text{ si } n \geq 1 \text{ alors } n+1 \geq 0 \text{ et } 2n+1 \geq 0 \\
&\qquad\qquad \text{et la } x \mapsto x^2 \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+) \\
&\Leftrightarrow \quad 4n^2+4n \leq 4n^2+4n+1,\ n \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1,\ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Cette dernière proposition étant vraie. Par équivalence, on en déduit que (2) est donc vraie.
Les inégalités (1) et (2) étant vraies, il en résulte que $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, on a

$$2\sqrt{n+1}-2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n}-1.$$

Exercice 4 (Un problème de logique)**.** Trois personnes, A, B, C possèdent chacun un entier naturel non nul mystère qu'on cherche à retrouver. On note respectivement N_A, N_B, N_C les entiers de A, B, C. On sait initialement que la somme des trois nombres est égale à 14. Ces trois personnes ont la conversation suivante :

— A : je ne sais pas ce qu'ont les autres, mais grâce à N_A je peux affirmer que B et C ont des nombres différents.

— B : sans prendre en compte l'affirmation de A, je peux affirmer avec N_B que les trois nombres mystères sont tous différents.

— C : en prenant en compte les affirmations de A et B, je connais les valeurs de N_A, N_B, N_C.

1. Justifier que N_A est nécessairement un nombre impair.
2. Justifier que N_B appartient nécessairement à l'ensemble $\{7, 9, 11\}$.
3. Montrer que $N_C \in \{2, 4, 6\}$.
4. Montrer que si $N_C \in \{2, 4\}$, alors C ne peut pas conclure.
5. En déduire N_A, N_B, N_C.

Correction

1. Montrons par la contraposée que N_A est impair. Supposons que N_A est pair.
   Par hypothèse, on sait que $N_A + N_B + N_C = 14$. Donc :
   $$N_B + N_C = 14 - N_A.$$
   N_A étant pair, $14 - N_A$ est alors pair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $14 - N_A = 2k$.
   A ne peut donc pas affirmer que B et C ont des nombres différents : en effet, leur nombre pourrait être égal à k.
   <u>On en déduit que pour que l'affirmation de A soit valide, il est nécessaire, N_A est un nombre impair.</u>
2. Montons que $N_B \in \{7, 9, 11\}$.
   L'affirmation de B contient une information plus importante que celle de A : il sait que les trois nombres sont différents, donc en particulier que les deux autres ont des nombres différents. Par un raisonnement similaire à la question 1, on en déduit que B a un nombre impair. Justifions que B a un nombre impair supérieur ou égal à 7.
   Supposons que N_B est un nombre impair inférieur strict à 7. Une possibilité est que $N_C = N_B$, et que $N_A = 14 - N_B - N_C$. Du fait que N_B et N_C sont inférieurs stricts à 7, on a $N_B + N_C < 14$. Donc N_A est bien un entier supérieur à 1. Mais alors B ne pourrait pas affirmer que les trois nombres sont tous différents. On en déduit que N_B est un nombre supérieur ou égal 7.
   De plus, les trois nombres étant supérieurs à 1, N_B ne peut pas être supérieur ou égal 13.
   Or l'ensemble des entiers impairs supérieurs à 7 et inférieurs stricts à 13 est donné par
   $$\{7, 9, 11\}.$$
   On en conclut qu'on a bien
   $$\boxed{N_B \in \{7, 9, 11\}}.$$
3. Du fait que N_A et N_B sont impairs et que $N_C = 14 - N_A - N_B$, on peut affirmer que N_C est un nombre pair. De plus, N_B étant un nombre plus grand que 7, si $N_C \geq 7$, on aurait alors :
   $$N_B + N_C > 14,$$
   ce qui est faux. Donc nécessairement, $N_C < 7$. Or l'ensemble des nombres pairs positifs inférieurs à 7 est donné par $\{0, 2, 4, 6\}$ sachant qu'on sait que les nombres sont non nuls, on peut en conclure
   $$\boxed{N_C \in \{2, 4, 6\}}.$$
4. Procédons par disjonction de cas :
   — Cas 1 : $N_C = 2$ il existe au moins deux possibilités : en posant $N_A = 3, N_B = 9$. On a bien $N_A + N_B + N_C = 14$ et les propositions de A, B qui restent valides.
   On peut également avoir : $N_A = 1, N_B = 11$. Les propositions de A, B restent valides et la somme des trois nombres est égale à 14.
   on ne peut donc pas conclure dans ce cas.
   — Cas 2 : $N_C = 4$. en procédant de la même façon, on pourrait avoir deux possibilités
   (a) Cas 1 : $N_A = 3, N_B = 7$
   (b) Cas 2 : $N_A = 1, N_B = 9$.
   Par disjonction de cas, constatons que pour tout $N_C \in \{2, 4\}$, il est impossible de conclure.
5. D'après les questions 3 et 4, on en conclut que $N_C = 6$. On en déduit que
   $$N_A + N_B = 8.$$
   Or $N_B \in \{7, 9, 11\}$. N_A étant positif, on en déduit que $N_B = 7$. Il en résulte que $N_A = 1$.
   On en conclut que
   $$\boxed{N_A = 1, N_B = 7, N_C = 6}.$$

Exercice 5. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x en fonction du paramètre réel m :
$$mx^2 + x + \frac{m}{4} = 0.$$

Correction

Procédons par disjontion de cas.

- Cas 1 : $m = 0$. L'équation est alors équivalente à
$$x = 0.$$
Dans ce cas, $\underline{S = \{0\}}$.
- Cas 2 : $m \neq 0$.
On reconnaît alors une équation du second degré ayant comme discriminant $\Delta = 1 - m^2$. Distinguons que nouveaux cas suivant le signe de Δ.
  - sous-cas 1 : $|m| > 1$.
  On a alors $\Delta < 0$ et on en conclut que l'équation n'a pas de solution réelle.
  - sous-cas 2 : $m = 1$ ou $m = -1$. Dans ce cas le discriminant est nul et l'équation est alors équivalente à
  $$x = \frac{-1}{2m}.$$
  Dans ce cas, $\underline{S = \{\frac{-1}{2m}\}}$.
  - sous-cas 3 : $|m| < 1$ et $m \neq 0$ (autrement dit, $m \in]-1, 1[\setminus\{0\}$)
  Dans ce cas, le discriminant est strictement positif, et l'équation est alors équivalente à
  $$x = \frac{-1 + \sqrt{1 - m^2}}{2m} \text{ ou } x = \frac{-1 - \sqrt{1 - m^2}}{2m}.$$
  Donc $\underline{S = \{\frac{-1+\sqrt{1-m^2}}{2m}, \frac{-1-\sqrt{1-m^2}}{2m}\}}$.

Exercice 6. On cherche à démontrer les propositions suivantes :

- P_1 : toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
- P_2 : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Pour cela, on pourra uniquement utiliser le théorème suivant :

T : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On rappelle également que $\mathbb{Z}$ n'est ni majorée, ni minorée.

1. Donner une définition à l'aide de symboles logiques de : "$\mathbb{Z}$ n'est pas minorée".
2. On veut démontrer P_1. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.
   (a) Justifier qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $\forall a \in A, k_0 \leq a$.
   (b) On pose $C = \{a - k_0, a \text{ décrit } A\}$. Justifier que C admet un plus petit élément qu'on note c_0.
   (c) Montrer que $c_0 + k_0$ est le plus petit élément de A.
   (d) Conclure.
3. On veut démontrer P_2. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$.
   (a) On pose $B = \{-a, a \text{ décrit } A\}$. Montrer que B est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que B admet un plus petit élément qu'on note b_0.
   (c) Montrer que $-b_0$ est le plus grand élément de A.
   (d) Conclure.

Correction

On cherche à démontrer les propositions suivantes :

- P_1 : toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
- P_2 : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Pour cela, on pourra uniquement utiliser le théorème suivant :

T : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On rappelle également que $\mathbb{Z}$ n'est ni majorée, ni minorée.

1. "$\mathbb{Z}$ n'est pas minorée" s'écrit : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n < A$.
2. On veut démontrer P_1. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.

(a) La partie A étant minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a \in A, m \leq a.$$

La partie $\mathbb{Z}$ nétant pas minorée, il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ vérifiant $k_0 \leq m$. On en déduit que

$$\boxed{\forall a \in A, k_0 \leq a}.$$

(b) On pose $C = \{a - k_0, a \text{ décrit } A\}$.
Montrons que C est une partie non vide et de $\mathbb{N}$.

— C est non vide :
par hypothèse, A est non vide. Il existe donc $a \in A$.
donc par définition, $a - k_0$ est un élément de C.

— C est une partie de $\mathbb{N}$: soit $c \in C$. Il existe donc $a \in A$ vérifiant

$$c = a - k_0.$$

or a et k_0 sont des entiers, donc c est un entier. De plus, $a \geq k_0$. Donc $a - k_0$ est un entier positif. Autrement dit, $c \in \mathbb{N}$.
Ainsi, C est bien une partie de $\mathbb{N}$.

on en conclut que C est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et d'après T on en déduit que C admet un plus petit élément qu'on note c_0.

(c) c_0 étant un élement de C, il existe donc un $a_0 \in A$ vérifiant :

$$c_0 = a_0 - k.$$

on en déduit que $a_0 = c_0 + k_0$. Ainsi, $c_0 + k_0$ est bien un élément de A.
Vérifions que a_0 est le plus petit élément de A.
Soit $a \in A$. c_0 étant le plus petit élément de C et $a - k_0 \in C$, on a donc

$$c_0 \leq a - k_0.$$

D'où

$$a_0 - k_0 \leq a - k_0.$$

Donc

$$a_0 \leq a.$$

Ainsi, tout élément de A est plus petit que $c_0 + k_0$ et cet entier est un élement de A.
Donc $\underline{c_0 + k_0 \text{ est le plus petit élément de } A}$.

(d) On a montré qu'une partie A non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément. Remarquons que la démonstration donnée étant valide pour tout A non vide et minorée de $\mathbb{Z}$, $\underline{\text{on en déduit que } P_1 \text{ est vraie.}}$

3. On veut démontrer P_2. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$.

(a) On pose $B = \{-a, a \text{ décrit } A\}$. Justifions que B est une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.

— B est non vide : Justifions que B est non vide. Par hypothèse, A est non vide. Il existe donc un $a \in A$. Donc $-a \in B$.
B est bien non vide.

— B est minorée :
Par hypothèse, A est une partie majorée de $\mathbb{Z}$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a \in A, a \leq M.$$

Montrons que $-M$ est un minorant de B
Soit $b \in B$. Il existe donc $a \in A$ vérifiant $b = -a$. Or M est un minorant de A. On a donc $a \leq M$. D'où $-a \geq -M$ c'est-à-dire $b \geq -M$.
La démonstration donnée étant valide pour tout $b \in B$, on en déduit que $-M$ est bien un minorant de B.

— B est inclus dans $\mathbb{Z}$:
soit $b \in B$. Il existe $a \in A$ vérifiant $b = -a$. Or A est une partie de $\mathbb{Z}$, donc $-a \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $b \in \mathbb{Z}$.
On en conclut que B est inclus dans $\mathbb{Z}$.

B est bien une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$.

(b) B étant une partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$, d'après P_1 qui a été démontrée dans la question 2, on en conlut que B admet un plus petit élément qu'on note b_0.

(c) Montrons que $-b_0$ est le plus grand élément de A

- ⋆ $-b_0$ est un majorant de A : soit $a \in A$.
  Par construction de B, $-a$ est un élément de B. Or b_0 est le plus petit élément de B. Donc

  $$a \geq b_0.$$

  D'où $a \leq -b_0$.
  On en déduit que $-b_0$ est bien un majorant de A.
- ⋆ $-b_0 \in A$: par contruction, b_0 est un élement de B. Il existe donc $a_0 \in A$ vérifiant

  $$b_0 = -a_0.$$

  Donc $-b_0 = a_0$. $-b_0$ est bien un élément de A.

On en déduit que $-b_0$ est le plus grand élément de A.

(d) On a montré qu'une partie A non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. La démonstration étant valide pour toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$, on en conclut que P_2 est vraie.