

# DS 2 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

- 
- Durée : 3 heures.
  - Documents et calculatrice non autorisés.
  - Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.
- 

**Exercice 1.** On définit la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  par :

$$S_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + 8(n+1)^3.$$

1. Calculer  $S_1, S_2, S_3$ .
2. Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $S_n = 2(n(n+1))^2$ .

**Exercice 2.** On cherche à résoudre l'équation d'inconnu réel  $x$  en fonction du paramètre réel  $a$  suivante :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a. \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de l'équation (E).
2. Montrer que si  $a < 1$ , alors (E) n'a pas de solution.
3. Désormais, on suppose que  $a \geq 1$ .
  - (a) Montrer qu'on a l'équivalence :

$$(E) \iff \left( x = \frac{(a^2 - 1)^2}{4a^2} \text{ et } a^2 - 2x - 1 \geq 0 \right).$$

- (b) Résoudre l'inéquation d'inconnu réel  $y \neq 0$  :  $y^2 - 2\left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right)^2 - 1 \geq 0$
- (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) pour  $a \geq 1$ .

**Exercice 3.** Résoudre les équations et inéquations trigonométriques d'inconnu réel  $\theta$  suivantes :

1.  $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    2.  $\sin(\theta) + \sin(2\theta) = 0$ .    3.  $\sin(\theta) - \cos(2\theta) > 0$ .

**Exercice 4.** On cherche à expliciter la valeur de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ . On pose :  $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ .

1. Montrer que :

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0.$$

2. En déduire que  $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$ .
3. Montrer que  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  est solution de l'équation d'inconnu réel  $x$  :

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

4. En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .
5. En déduire l'écriture algébrique de  $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ .

**Exercice 5.** Soit un entier  $n \geq 2$ . Simplifier les sommes suivantes :

1.  $S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$     2.  $T_n = \sum_{k=1}^n (2^n - 2^k)$     3.  $U_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$     4.  $V_n = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{3}^k\right) + \frac{n}{n+3}$ .