DS 2 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On définit la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ par :

$$S_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + 8\,(n+1)^3\,.$$

1. Calculer S_1, S_2, S_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n = 2\,(n\,(n+1))^2$.

Correction

On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par :

$$S_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = S_n + 8\,(n+1)^3\,.$$

1. On a
$$\boxed{S_1 = 8, S_2 = 72, S_3 = 288}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P\,(n) : S_n = 2\,(n\,(n+1))^2$
Montrons que P est vraie par récurrence.
— Initialisation : on a $S_0 = 0$ et $2\,(0\,(0+1))^2 = 0$.
Donc $P\,(0)$ est vraie.
— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P\,(n)$ est vraie. Montrons alors que $P\,(n+1)$ est vraie.
Par définition de S_{n+1}, on a
$$S_{n+1} = S_n + 8\,(n+1)^3\,.$$
D'après $P\,(n)$, on en déduit que
$$S_{n+1} = 2\,(n\,(n+1))^2 + 8\,(n+1)^3\,.$$
En factorisant par $2\,(n+1)^2$, on obtient
$$S_{n+1} = 2\,(n+1)^2\left(n^2 + 4\,(n+1)\right).$$
Donc
$$S_{n+1} = 2\,(n+1)^2\left(n^2 + 4n + 4\right).$$
Or $n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$. Donc
$$S_{n+1} = 2\,(n+1)^2\,(n+2)^2\,.$$
Ce qui se réécrit
$$S_{n+1} = 2\,((n+1)\,(n+1+1))^2\,.$$
$P\,(n+1)$ est donc vraie.
— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\boxed{S_n = 2\,(n\,(n+1))^2}.$$

Exercice 2. On cherche à résoudre l'équation d'inconnu réel x en fonction du paramètre réel a suivante :

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=a. \tag{E}$$

1. Déterminer le domaine de définition de l'équation (E).
2. Montrer que si $a<1$, alors (E) n'a pas de solution.
3. Désormais, on suppose que $a \geq 1$.
   (a) Montrer qu'on a l'équivalence :

   $$\text{(E)} \iff \left(x=\frac{\left(a^2-1\right)^2}{4a^2} \text{ et } a^2-2x-1 \geq 0\right).$$

   (b) Résoudre l'inéquation d'inconnu réel $y \neq 0$: $y^2-2\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)^2-1 \geq 0$

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) pour $a \geq 1$.

Correction

1. L'équation est définie si et seulement si $x \geq 0$ et $x \geq -1$. On en déduit que

$$\boxed{D_E=[0\,;+\infty[}.$$

2. Soit $a<1$. x étant positif, on a donc $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 1$. D'où $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} \geq 1$. L'équation (E) n'as donc pas de solution.
3. Désormais, on suppose que $a \geq 1$.
   (a) Raisonnons par équivalence. Les deux membres de l'égalité étant positif, on a

   $$\text{(E)} \iff (\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2=a^2$$

   En développant, on obtient

   $$\text{(E)} \iff x+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}+x+1=a^2.$$

   Donc

   $$\text{(E)} \iff 2\sqrt{x}\sqrt{x+1}=a^2-2x-1$$

   Par positivité de x, on en déduit que

   $$\text{(E)} \iff 4x(x+1)=(a^2-2x-1)^2 \text{ et } a^2-2x-1 \geq 0.$$

   En développant, on a alors

   $$\text{(E)} \iff 4x^2+4x=4x^2+4x+1-4a^2x-2a^2+a^4 \text{ et } a^2-2x-1 \geq 0.$$

   Après simplifications :

   $$\text{(E)} \iff 0=-4a^2x+1-2a^2+a^4 \text{ et } a^2-2x-1 \geq 0.$$

   Donc

   $$\text{(E)} \iff 4a^2x=1-2a^2+a^4 \text{ et } a^2-2x-1 \geq 0.$$

   a étant non nul et en reconnaissant une identité remarquable, on en déduit que

   $$\boxed{\text{(E)} \iff x=\frac{(a^2-1)^2}{4a^2} \text{ et } a^2-2x-1 \geq 0}$$

   (b) Résolvons l'équation d'inconnue $y \neq 0$: $y^2-2\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)^2-1 \geq 0$. Raisonnons par équivalence. Le réel y étant non nul, $2y^2$ est donc strictement positif. Donc

   $$\begin{aligned} y^2-2\left(\tfrac{y^2-1}{2y}\right)^2-1 \geq 0 &\Leftrightarrow 2y^2\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)\left(2y^2-\left(y^2-1\right)\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)\left(y^2+1\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Or $y^2+1>0$. On en déduit que

$$y^2-2\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)^2-1\geq 0 \iff y^2-1\geq 0.$$

On en conclut que

$$\boxed{S=\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[1\,;+\infty\right[}.$$

(c) Dans le cas où $x=\frac{\left(a^2-1\right)^2}{4a^2}$, sachant que $a\geq 1$, d'après la question 3b, on a bien $a^2-2x+1\geq 0$. On en conclut que

$$(\mathrm{E}) \iff x=\frac{\left(a^2-1\right)^2}{4a^2}.$$

Donc pour tout $a\geq 1$, on a

$$\boxed{S=\left\{\frac{\left(a^2-1\right)^2}{4a^2}\right\}}.$$

Exercice 3. Résoudre les équations et inéquations trigonométriques d'inconnu réel θ suivantes :

1. $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. 2. $\sin(\theta)+\sin(2\theta)=0$. 3. $\sin(\theta)-\cos(2\theta)>0$.

Correction

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)+\sin(\theta)=\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &\iff \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right)=\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\
&\iff \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos(\theta)+\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin(\theta)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \cos\left(\theta-\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \theta-\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } \theta-\tfrac{\pi}{4}=-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \theta=\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } \theta=\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \theta=\tfrac{5\pi}{12}+2k\pi \text{ ou } \theta=\tfrac{\pi}{12}+2k\pi
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{S=\{\frac{\pi}{12}+2k\pi, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\}\cup\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\}}.$$

2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
\sin(\theta)+\sin(2\theta)=0 &\iff \sin(\theta)+2\sin(\theta)\cos(\theta)=0\\
&\iff \sin(\theta)(1+2\cos(\theta))=0\\
&\iff \sin(\theta)=0 \text{ ou } \cos(\theta)=-\frac{1}{2}\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \theta=k\pi \text{ ou } \theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } \theta=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi.
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\boxed{S=\{k\pi, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-2\pi}{3}+2k\pi, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\right\}}.$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence.

$$\sin(\theta) - \cos(2\theta) > 0 \iff \sin(\theta) - 1 + 2\sin(\theta)^2 > 0.$$

Étudions d'abord le signe du trinôme du second degré $P : x \mapsto 2x^2 + x - 1$. Ce polynôme a comme racine évidente -1, l'autre racine est alors donnée par $\frac{1}{2}$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty\,;-1[\cup]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ Or la fonction sin est à valeurs dans $[-1\,;1]$. Ainsi, l'inéquation est équivalente à :

$$\sin(\theta) \in]\frac{1}{2}\,;1].$$

On en déduit que

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{6} + 2k\pi\,;\frac{5\pi}{6} + 2k\pi[}.$$

Exercice 4. On cherche à expliciter la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On pose : $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Montrer que :

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0.$$

2. En déduire que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
3. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation d'inconnu réel x :

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

4. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. En déduire l'écriture algébrique de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Correction

1. Par définition, $z_0 \neq 1$. De plus, on reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. Donc

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \frac{1 - z_0^5}{1 - z_0}.$$

Or $(z_0)^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{2i\pi} = 1$. D'où

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \frac{1-1}{1-z_0} = 0.$$

On a bien

$$\boxed{1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0}.$$

2. En remplaçant z_0 par $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, on a alors :

$$1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = 0.$$

Or $e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{10i\frac{\pi}{5} - 4i\frac{\pi}{5}} = e^{-4i\frac{\pi}{5}}$, et $e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{10i\frac{\pi}{5} - 2i\frac{\pi}{5}} = e^{-2i\frac{\pi}{5}}$. Donc

$$1 + e^{2i\frac{\pi}{5}} + e^{4i\frac{\pi}{5}} + e^{-4i\frac{\pi}{5}} + e^{-2i\frac{\pi}{5}} = 0.$$

D'où

$$1 + (e^{2i\frac{\pi}{5}} + e^{-2i\frac{\pi}{5}}) + (e^{4i\frac{\pi}{5}} + e^{-4i\frac{\pi}{5}}) = 0$$

À l'aide des formules d'Euler, on en déduit que

$$\boxed{1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0}.$$

3. On a d'après la question 2 :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$

Donc

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{5}\right) = 0.$$

En appliquant une formule de duplication, on en déduit que

$$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2-1\right)=0.$$

D'où

$$\underline{4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=0.}$$

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est bien solution de l'équation d'inconnu réel x :

$$4x^2+2x-1=0. \tag{E}$$

4. L'équation (E) est une équation du second degré de discriminant 20. Elle admet donc exactement deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{8}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{8}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Or $\frac{2\pi}{5}\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$. Donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une solution positive de (E). Or x_1 est l'unique solution positive de (E). On en déduit que

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}.$$

5. Calculons d'abord $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2=1.$$

Donc, d'après la question 4 :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2=1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2.$$

En simplifiant l'expression de droite :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

On en déduit que

$$\left|\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right|=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Or $\frac{2\pi}{5}\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$. Donc $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\geq 0$. On en déduit que : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.
Ainsi,

$$\boxed{e^{2i\frac{\pi}{5}}=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)+i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}}.$$

Exercice 5. Soit un entier $n\geq 2$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$ 2. $T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2^n-2^k\right)$ 3. $U_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ 4. $V_n=\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{n}{3}\right)^k\right)+\frac{n}{n+3}$.

Correction

1. On a :

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)\\&=4(\sum_{k=1}^{n}k^2)-4(\sum_{k=1}^{n}k)+(\sum_{k=1}^{n}1).\end{aligned}$$

En appliquant les différentes formules, on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= 4(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) - 4(\frac{n(n+1)}{2}) + n \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n \\ &= \frac{n}{3}(2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3) \\ &= \frac{n}{3}(4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3) \\ &= \boxed{\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}} \end{aligned}$$

.

2. On a :

$$T_n = (\sum_{k=1}^{n} 2^n) - (\sum_{k=1}^{n} 2^k).$$

On reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 qui est différent de 1. Donc

$$T_n = n2^n - \frac{2 - 2^{n+1}}{1-2}.$$

Donc

$$\boxed{T_n = (n-2)2^n + 2}.$$

3. On a :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

On reconnaît une somme télescopique. D'où :

$$\boxed{U_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)}.$$

4. On a :

$$V_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-n}{3}\right)^k\right) + \frac{n}{n+3}.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{-n}{3} \neq 1$. Donc

$$V_n = \frac{-\frac{n}{3} - \left(-\frac{n}{3}\right)^{n+1}}{1 + \frac{n}{3}} + \frac{n}{n+3}.$$

D'où

$$\boxed{V_n = \frac{n}{n+3} \cdot \left(\frac{-n}{3}\right)^n}.$$